

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МЕХАНИКА

*П. Чедвик
А. Кокс
Г. Гопкинс*

**МЕХАНИКА
ГЛУБИННЫХ
ПОДЗЕМНЫХ
ВЗРЫВОВ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«М И Р»

MECHANICS
OF DEEP UNDERGROUND
EXPLOSIONS

by

P. CHADWICK, A. D. COX and H. G. HOPKINS

PHYLOSOPHICAL TRANSACTIONS
OF THE
ROYAL SOCIETY OF LONDON

Series A. Mathematical and Physical Sciences
№ 1070, v. 256, 23 July 1964

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МЕХАНИКА»

П. ЧЕДВИК, А. КОКС, Г. ГОПКИНС

МЕХАНИКА ГЛУБИННЫХ ПОДЗЕМНЫХ ВЗРЫВОВ

Перевод с английского
В. Н. Николаевского

Под редакцией
Г. С. Шапиро

ИЗДАТЕЛЬСТВО «М И Р»
Москва 1966

Работа известных английских ученых, один из авторов которой Г. Гопкинс знаком советскому читателю по его книге «Динамические неупругие деформации металлов» (изд-во «Мир», 1964), посвящена проблеме глубинных взрывов, представляющей интерес как с точки зрения мирного использования взрыва в народном хозяйстве, так и с точки зрения приложений, в первую очередь подземных ядерных испытаний. Принятая в ней расчетная модель глубинного взрыва как быстрорасширяющейся каверны в бесконечном упруго-пластическом грунте в ряде случаев приводит к количественному согласованию вычисленных и наблюдаемых результатов.

Книга представляет интерес для научных работников (механиков и геофизиков), инженеров, занимающихся исследованиями, связанными с подземными взрывами, а также для аспирантов и студентов университетов и технических вузов соответствующих факультетов и специальностей.

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая книга посвящена весьма актуальной проблеме образования камуфлетных полостей в грунтах при подземных взрывах. Авторы книги — известные английские ученые П. Чедвик, А. Кокс, Г. Гопкинс, — отдавая себе отчет в сложности описания физических процессов, возникающих при взаимодействии заряда и грунта, использовали упрощенную математическую модель подземных взрывов. Наиболее существенным является допущение о том, что основная часть первичного расширения камуфлетной полости возникает после прохождения ударной волны в грунте, вызванной выходом детонационной волны на поверхность заряда. Это предположение (наряду с обычно применяемыми представлениями о сферической симметрии движения и гипотезами о несжимаемости среды, течение которой считается подчиняющимся закону Кулона — Мора) позволило авторам исключить эффект распространения ударной волны и успешно довести решение до числовых результатов.

Предложенная качественная схема движения применялась ранее в теории образования газового пузыря при подводных взрывах, а также в развитой Г. Гопкинсом теории динамического образования сферических каверн в металлах [1]. Было бы преждевременно делать окончательные выводы о том, в какой мере эта модель обеспечивает приемлемый учет качественных характеристик образования полостей при глубинных подземных взрывах. Однако авторы книги указывают, что в ряде случаев вычисленные размеры каверн оказались достаточно близкими к наблюдаемым.

Книга состоит из трех частей. В первой обсуждаются более ранние теоретические исследования, а также свойства грунтов и характер развития взрыва. Во второй части описывается математическая постановка задачи о сферическом движении грунта. Третья часть посвящена рассмотрению камуфлетного движения, моделирующего взрыв. Сначала на основе неопубликованного решения Пенни — Тейлора приведены результаты для точечного источника, а затем — результаты авторов (в том числе числовые) для сферического заряда конечного радиуса. В заключе-

ние обсуждается определяющее уравнение для случая больших упругих деформаций, а также некоторые другие теории.

Следует заметить, что в поле зрения авторов оказались лишь некоторые советские работы, опубликованные до 1960 г. Для ознакомления с работами, выполненными в Советском Союзе, отсылаем читателя к монографиям [2—4] и обзору [5].

Отметим также недавно опубликованную работу С. С. Григоряна [6], в которой в рамках развитой им теории динамического деформирования грунтов рассматривается задача о камуфлетном взрыве и излагается метод построения полного решения, учитывающего эффект распространения ударной волны и излучения упругого предвестника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о п к и н с Г., Динамическое расширение сферических полостей в металлах, в книге Г о п к и н с Г., «Динамические неупругие деформации металлов», изд-во «Мир», М., 1964.
2. Л я х о в Г. Н., П о к р о в с к и й Г. И., Взрывные волны в грунтах, Госгортехиздат, 1962.
3. Д о к у ч а е в Н. Н., Р о д и о н о в В. Н., Р о м а ш о в А. Н., Взрыв на выброс, *Изв. АН СССР*, 1963.
4. Л я х о в Г. Н., Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах, изд-во «Наука», 1964.
5. З в о л и н с к и й Н. В., М а л ы ш е в Б. М., Ш а п и р о Г. С., Динамика пластических сред, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, т. III, изд-во «Наука», 1966.
6. Г р и г о р я н С. С., К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах, *Прикл. матем. и механ.*, 28, № 6, 1070—1082 (1964).

1. Введение

Рассмотрение эффектов взрывов в грунтах осложнено многими факторами, и в первую очередь физическими характеристиками естественных грунтов. Не так легко добиться прогресса в понимании механизма рассматриваемого явления, и предыдущие исследования приводили только к весьма ограниченным результатам. В данной работе исследование ограничивается простейшим случаем подземного химического взрыва, произведенного на такой глубине, при которой до поверхности грунта доходят только возмущения, существенно связанные с волнами упругих напряжений. Этот случай наиболее важен для общей проблемы действия взрыва в грунтах. Изучаемая здесь модель движения каверны, или камуфлетного движения, используется для исследования подземных взрывов. Эта модель, по-видимому, обеспечивает реалистический учет некоторых качественных характеристик, хотя справедливость интерпретации и оценки полученных количественных результатов остается неопределенной из-за ограничений, присущих принятой модели, и недостатка удовлетворительных экспериментальных данных.

Нужно заметить, что в военном деле термин *камуфлет* означает глубинный заряд, который при взрыве не оказывает разрушающего действия на поверхность земли. Хотя, согласно первоначальному смыслу, *камуфлет* и означает глубинный заряд, здесь этот термин используется для названия образующейся при взрыве каверны.

Причинами, побудившими проводить настоящее исследование, послужили отклонения от закона геометрического подобия Гопкинсона при сильных взрывах, а также необходимость дальнейшего развития предыдущих исследований камуфлетного движения, выполненных Тейлором

и Пенни (см. разд. 2). Вопросы, связанные с военным взрывным делом, здесь непосредственно не затрагиваются.

Содержание этой работы разделено на три части следующим образом. В ч. I излагаются некоторые предварительные соображения. Здесь проводится обсуждение эффектов, сопровождающих взрывы в грунтах, и намечаются подходы к их изучению, а также излагаются положения теории размерностей в применении к взрывам в грунтах. Кроме того, приводится сводка физических свойств продуктов взрыва тринитротолуола (ТНТ) и таких *естественных* грунтов, как глины и пески; обсуждается идеализация этих свойств, используемая в последующих разделах работы. В ч. II внимание сосредоточено на теоретической механике *идеальных* грунтов и формулируются основные уравнения сферического упруго-пластического движения. В ч. III рассматриваются в основном модели камуфлетного движения, принадлежащие Тейлору и Пенни, а также авторам данной работы; дается детальное изложение теорий с числовыми расчетами. Наконец, приведены заключительные замечания по проведенному исследованию.

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ

2. Эффекты взрывов в грунтах

2.1. Общие основы

Общая проблема явлений, сопровождающих взрыв в грунтах, включает в себя большое число аспектов, существенно важных как с военной, так и с гражданской точек зрения. Достоинные внимания задачи обычно характеризуются сложностью и неопределенностью физической картины и математическими трудностями, сопутствующими теоретическому анализу. В частности, из-за трудности проведения удовлетворительного теоретического исследования процессов образования воронки и каверны при взрывах большие надежды возлагаются на законы подобия. При помощи таких законов коррелируются данные, полученные для взрывов различной силы, и в области их применимости они позволяют предсказать эффекты взрыва любой заданной мощности.

Вплоть до конца второй мировой войны наибольшая мощность химического взрыва, для которого требовалось предсказать эффект воздействия, составляла около 50 T (1 T означает 10^9 кал, что примерно равно энергии, выделяемой одной тонной тротила), и было обнаружено, что закон геометрического подобия Гопкинсона (см. п. 3.1) дает достаточно удовлетворительные результаты. Однако развитие ядерной техники резко увеличило мощность производимых взрывов — вплоть до взрывов с выделением энергии порядка 100 MT . Кроме того, в испытания, проведенные в серии ядерных и химических взрывов для мирных целей (проект Плоушэр — Plowshare) Комиссией по атомной энергии Соединенных Штатов, были включены химические взрывы мощностью вплоть до 450 T .

Закон геометрического подобия Гопкинсона в той форме, в которой он обычно применяется, приводит, например, к заключению, что и диаметр, и глубина воронки, образующейся при взрыве на поверхности земли, прямо пропорциональны кубическому корню из объема заряда, или, что то же, характерному линейному масштабу заряда (см. п. 3.1). Хотя Гопкинсон рассматривал исключительно химические взрывы, его закон пригоден только для исследования некоторого отдельного класса взрывов, характеризуемого условием неизменности природы взрыва и окружающей среды. Внутри этого класса закон предсказывает, что форма воронки (например, отношение глубины к диаметру), образующейся при взрыве на поверхности земли, остается неизменной. Однако этот прогноз о независимости формы воронки от мощности взрыва, как теперь известно, не подтверждается результатами наблюдений. Так, воронки, образующиеся при ядерных взрывах, с увеличением мощности взрыва становятся относительно более мелкими. Точнее, экспериментальные данные говорят о том (см. Гласстон [1, стр. 289—296]), что в диапазоне мощностей ядерных взрывов диаметр и глубина воронки возрастают приблизительно пропорционально полной выделяющейся энергии в степени одна треть и одна четвертая соответственно. Подобная тенденция, по-видимому, имеет место и при химических взрывах, хотя это до сих пор не установлено с полной определенностью. Можно также заметить, что лунные

(а, возможно, также земные) кратеры, возникшие, по мнению некоторых специалистов, из-за ударов метеоритов, проявляют ту же тенденцию — они становятся относительно более мелкими с ростом их размеров (см., например, Хилл и Гилварри [1]).

Нарушение закона Гопкинсона при коррелировании эффектов взрывов с большой высвобождаемой энергией является одной из причин возобновления интереса к теоретическим исследованиям механики взрывов в грунтах. Вероятно, объяснение этого нарушения связано с предположением, сделанным при выводе закона геометрического подобия Гопкинсона, о том, что воздействие сил тяжести пренебрежимо мало (см. п. 3.1). Однако в механике грунтов обычно принято описывать условие возникновения пластического течения в типичном естественном грунте законом разрушения Кулона (см. п. 4.2.2). Закон Кулона утверждает, что касательное напряжение, при котором происходит течение, является суммой постоянного напряжения сцепления и напряжения трения, линейно возрастающего с увеличением нормальной компоненты вектора напряжения. Хотя этот закон основан на экспериментах, выполненных при малых напряжениях и деформациях, аналогичная закономерность, но не обязательно линейная, вероятно, выполняется и в условиях взрыва. Таким образом, в области грунта, подвергаемого пластическому деформированию, сопротивление относительному движению будет возрастать (часто значительно) с глубиной. Этот эффект делает несостоятельным обоснование закона геометрического подобия Гопкинсона, который, как можно полагать, потому и перестает, в конце концов, выполняться при экстраполировании на мощные взрывы, особенно для величин, относящихся к вертикальному направлению, как, например, для глубины воронки. Отсюда применимость закона геометрического подобия Гопкинсона ограничена относительно слабыми взрывами.

2.2. Предыдущие теоретические исследования

Анализ размерностей дает возможность качественно подойти к изучению явлений взрыва в грунтах. Этот подход был использован в неопубликованной работе Гопкин-

сона, датированной около 1915 г., которая и привела к закону геометрического подобия, обсуждавшемуся в п. 2.1.

Тейлор [1] в своей работе, посвященной теории одномерного распространения пластических волн конечной амплитуды, пользуется вариантом этой теории при исследовании распространения в грунте волн, возникающих при взрыве. Он замечает, что основные уравнения формально идентичны уравнениям распространения одномерных волн конечной амплитуды в сжимаемой идеальной жидкости (когда давление является функцией только плотности), хотя соответствие между этими двумя процессами выполняется только для волн нагружения, поскольку твердые материалы характеризуются гистерезисом в пластической области. Работа Тейлора весьма близка к анализу Кармана, Х. А. Рахматулина и др. (см., например, Крэггс [1] и Гопкинс [1]).

В связи с настоящим исследованием определенный интерес представляют некоторые другие работы, в которых рассматривается распространение ударных волн и образование каверн. Настоящее исследование образования камуфлетной полости в грунтах является, по существу, распространением теории образования каверн в металлах, рассмотренной Гопкинсом [1]. Некоторые общие обзоры работ, посвященных ударным волнам, в частности в металлах, были даны Райнхартом и Пирсоном [1, гл. 9 и 10] и Гопкинсом [2], соответственно с точек зрения эксперимента и теории (см. также Станюкович [1, стр. 568 и далее]). Имеется также большое число русских работ, в которых рассматриваются взрывы в грунтах в условиях сферической симметрии. Многие из этих интересных работ существенно основываются на гипотезе о конечном уплотнении грунтов, которая рассматривается далее в п. 7.3 (см. также Кристеску [1, стр. 227 и далее]; [2]).

Первый шаг в количественном изучении проблемы образования камуфлетной полости был сделан Девонширом и Моттом [1], хотя и без учета сопротивления трения в грунтах. Это исследование основывалось на более ранней работе Бишопы, Хилла и Мотта [1], посвященной статической глубокой штамповке металлов (см. Хилл [2, стр. 104]), но содержало важное количественное отличие, являющееся следствием того, что модуль Юнга и предел

текучести у грунтов гораздо меньше, чем у металлов. Позднее Хилл [1] вывел динамические уравнения, описывающие образование сферических камуфлетных полостей в грунтах, причем влиянием сопротивления трения и сжимаемости он пренебрегал. Главная цель работы Хилла заключалась в рассмотрении проблемы в общих чертах, причем не предпринималось попыток получить из теории подробные количественные результаты.

Ограниченность перечисленных теоретических исследований явлений взрывов в грунтах была, по-видимому, впервые осознана Тейлором и Пенни; они сделали новый шаг к более реалистическому исследованию, при котором учитывалось как трение, так и сцепление в грунтах. Этот подход был использован Пенни (1954, частное сообщение) для рассмотрения механики образования камуфлетной полости при подземном взрыве и образования воронки при поверхностном взрыве. В первой проблеме цель состояла, во-первых, в предсказании размеров камуфлетной полости, образующейся при химических взрывах, причем было получено удовлетворительное согласие с наблюдаемыми данными (хотя последние были немногочисленны), и, во-вторых, в получении некоторого общего представления о механизме взрывных явлений в грунтах. Во второй проблеме задача заключалась в получении законов геометрического подобия, которые могли бы заменить в случае мощных взрывов закон Гопкинсона, пригодный, как уже отмечалось в п. 2.1, только для слабых взрывов. Анализируя образование воронки при больших химических взрывах, Пенни принимает, что воронка и сопутствующие деформации грунта будут такими же, как и при медленном вдавливании в грунт жесткой сферы. Это означает, что радиус сферы возрастает пропорционально кубическому корню из полной выделяющейся энергии, причем константа пропорциональности определяется по мелкомасштабным опытным данным.

Тогда, предполагая, что энергия, затрачиваемая на образование воронки, является постоянной частью полной выделившейся энергии при химическом взрыве, а также делая правдоподобные предположения о нелинейном законе сопротивления проникновению сферы, можно оценить размеры воронки. Пенни показывает, что для диаметра

воронки от 20 до 4000 *фут* в песке и глине отношение диаметра к глубине будет изменяться пропорционально выделяющейся энергии в степени 0,30 и 0,24. Эти результаты выявляют ту же тенденцию, что и указанные в п.2.1 экспериментальные данные.

Полученное соответствие экспериментальных данных и теоретических результатов, основанных на подходе Тейлора и Пенни к проблеме образования воронки и камуфлетной полости, внушает доверие к использованной ими математической модели. В то же время незавершенность их исследований должна быть восполнена дальнейшей работой. В данной работе подробно развивается метод Тейлора — Пенни изучения подземных взрывов, а также предпринимается более полное исследование механизма образования камуфлетной полости. Хотя методы теории пластичности не являются универсально пригодными для изучения явлений, включающих порождаемые взрывами большие деформации грунтов, этот подход, по крайней мере в данном случае, по-видимому, оправдан.

2.3. Последовательность событий при подземных взрывах

Продолжая обзор предыдущих исследований, целесообразно вкратце рассмотреть существенные явления, характеризующие подземный взрыв. Нужно заметить, что имеется некоторое подобие и в то же время важные различия между сходными проблемами взрывов в таких плотных средах, как грунты, металлы и вода. Имеется много качественных сведений о последовательности физических явлений при взрывах в твердых или жидких средах. Для детального исследования взрывных процессов в воде и грунтах следует обратиться к работам Коула [1] и Гласстона [1], а также Покровского и Федорова [1].

Возмущение, возникающее при взрыве, приводящем к образованию камуфлетной полости, является в первую очередь результатом обмена энергией между газообразными продуктами взрыва и окружающим грунтом.

Источником энергии при этом служит сферический заряд химического бризантного вещества, для определенности, например, тротила.

Физика детонации сферического заряда тротила не зависит от природы окружающей среды. Этот процесс описан, в частности, Коулом [1, гл. 3]. Если предположить, что воспламенение производится в центре заряда, движение фронта детонации во внешнюю область и изменения физических и химических свойств газов в сопутствующем потоке описываются химико-гидродинамической теорией сферических детонационных волн. Движение характеризуется геометрическим подобием, причем на фронте детонации давление имеет порядок 10^5 атм, а температура — около 3000°C . В момент выхода детонационной волны на поверхность заряда, где окружающий грунт находится в покое, по поверхности грунта производится внезапный и исключительно резкий удар. Немедленным эффектом этого удара будет распространение возмущения (обычно ударной волны) в окружающую среду по невозмущенному до этого момента грунту. Одновременно по газообразным продуктам взрыва внутрь отражается волна разрежения, после чего геометрическое подобие нарушается. В силу диссипативных процессов и сферического расхождения возмущение, распространившееся во внешнюю область в грунте, затухает и, в конце концов, вырождается в упругую волну. Среда за ударным фронтом необратимо нагревается и в то же время вовлекается в движение, направленное во внешнюю область. Хотя скорости частиц в потоке не малы, сопутствующие смещения несравнимы с теми, которые возникают в последующие стадии движения, когда каверна сначала резко увеличивается, а затем пульсирует. Из-за последовательных отражений волн от поверхности каверны и ее центра происходят быстрые колебания давления в продуктах взрывов, но можно считать, что основная часть ударной волны излучается в грунт за очень малый промежуток времени. В ходе процесса будет происходить заметное уменьшение общей энергии, содержащейся в газах, причем повторяющиеся прохождения по ним волн будут в известной мере создавать однородные условия. До этого при определении механического состояния грунта вблизи поверхности каверны, где при таких высоких нагрузках грунт во многом подобен сжимаемой жидкой среде, сцепление, а возможно, и трение не играют роли. Однако в дальнейшем, когда преобладают резко

уменьшившиеся нагрузки, можно ожидать, что механическое поведение грунта будет ближе к обычно встречающемуся в строительной практике, хотя могут проявиться и некоторые отличия, связанные, например, с уплотнением (см. п. 7.3).

Теперь можно считать, что началась основная часть фазы первичного расширения камуфлетного движения, возникающая за ударной волной в грунте. Другими словами, приближенно можно показать, что расширение поверхности каверны вызывается расширением газообразных продуктов взрыва, энергия которых уменьшилась из-за передачи энергии ударной волне в грунте. В происходящем движении в силу инерции грунта и механических свойств продуктов взрыва и грунта создаются условия для колебательного движения с нелинейным демпфированием.

Можно думать, что в качественном отношении камуфлетное движение проявляет некоторое сходство с движением подобного газового пузыря. Так, в частности, нужно ожидать некоторого пульсирующего движения поверхности каверны. Однако, хотя это действительно и происходит, один из выводов, вытекающих из анализа настоящей модели, заключается в том, что при всех практических условиях амплитуда пульсаций, следующих за фазой первичного расширения, мала (см. п. 7.1.7). Таким образом, имеется важное количественное различие между движениями камуфлетной полости и пузырей. В фазе первичного расширения движение демпфируется пластической деформацией, в ходе которой происходит диссипация механической энергии. После окончания этой фазы имеется некоторое возвратное движение, хотя амплитуда его и невелика. Впоследствии демпфирование обусловлено и распространением энергии упругого деформирования на большие расстояния и диссипативными процессами в грунте и (в меньшей степени) в продуктах взрыва. Таким образом, прочность грунтов и их способность рассеивать механическую энергию при пластическом деформировании определяет заметные различия между детальными количественными эффектами взрывов в грунтах и в воде. В частности, камуфлетное движение состоит почти исключительно из одного полупериода пульсации, а именно из первой фазы

расширения. Пенни (1954, частное сообщение) охарактеризовал этот тип движения как бесколебательный, и, хотя этот термин в динамике имеет иной смысл, в данном контексте он является удобным.

2.4. Задачи и методы настоящего исследования

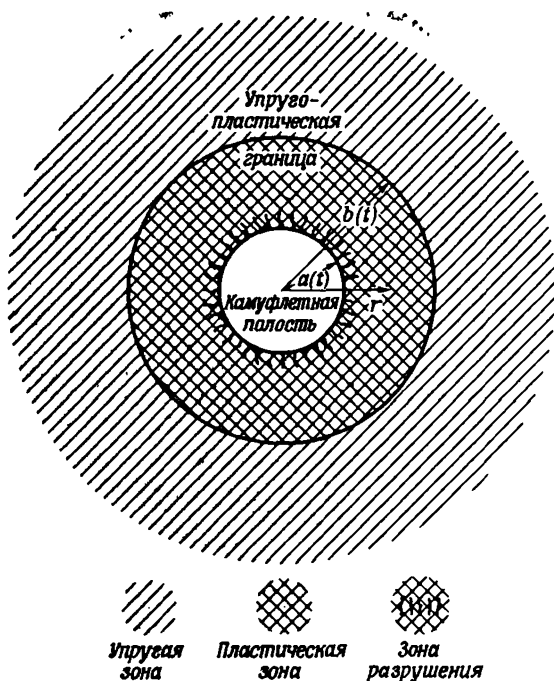
Цель данной статьи состоит в проведении единого теоретического исследования модели механизма образования камуфлетной полости. Будем предполагать, что движение обладает сферической симметрией. Это справедливо с удовлетворительной степенью точности, если области грунта, подвергаемая пластическому деформированию, достаточно однородна и не простирается до поверхности земли и если соответствующим образом учтен вес грунта. Таким образом, только эффекты, существенно связанные с волнами упругих напряжений, распространяются до поверхности земли. Это условие, конечно, означает, что для заданной глубины заложения заряда реальность рассматриваемой схемы прогрессивно уменьшается с увеличением мощности заряда. Более того, при этом нельзя учесть слоистость грунта.

На рис. 1 схематически изображено возмущение грунта, вызванное расширяющейся камуфлетной полостью. Здесь показаны зоны упругого и пластического деформирования, а также зона возникновения трещин. В данном исследовании возможность появления трещин в грунте для простоты исключается, так что зона трещин включается в пластическую зону.

Наиболее важная цель теории камуфлетного движения состоит в предсказании изменения во времени радиусов камуфлетной поверхности и упруго-пластической границы. Также существенно определить, какие части энергии заряда переходят в энергию ударной волны, в энергию упругого деформирования, в пластическую работу и в кинетическую энергию грунта. Поскольку камуфлетное движение является, по-видимому, бесколебательным, практический интерес представляет главным образом фаза первичного расширения.

Указанные выше величины зависят от многих физических свойств продуктов взрыва и грунта. Простой анализ

размерностей (приведенный в разд. 3) обеспечивает качественный подход и приводит к законам подобия и моделирования, справедливым при определенных условиях и представляющим особый интерес в связи с проектированием и интерпретацией экспериментов и предсказанием их



Р и с. 1. Схема распространения возмущения в грунте при расширении камуфлетной полости.

результатов. При таком анализе, конечно, можно учесть формально все физические свойства, которые имеют хотя бы некоторое заметное влияние, однако такая общность связана с уменьшением получаемых количественных результатов. Количественное теоретическое исследование камуфлетного движения можно провести только на основе математических моделей подземных взрывов, которые являются упрощенным описанием сложных физических

процессов, происходящих в действительности. Первый шаг в теоретических исследованиях состоит в выделении физических процессов, которые определяют основные черты возмущенного состояния. В итоге требуется достаточно простая теория, основанная на физически оправданных упрощениях истинной картины и приводящая к количественным предсказаниям, справедливость которых должна быть оценена по опытным данным.

Модельное представление подземных взрывов обязательно требует некоторого упрощения истинного механического поведения как продуктов взрыва, так и грунта, что обсуждается в разд. 4. Основные уравнения, описывающие модель камуфлетного движения, выводятся в разд. 5, причем исследование ограничивается сферическим движением. Наконец, нужно обратить внимание еще на одно обстоятельство, а именно нужно принять в расчет эффекты гравитации. Делается простое предположение, что вначале грунт находится под воздействием *однородного гидростатического давления* (принимаемого равным сумме атмосферного давления и давления вышележащей толщи земли, *overburden pressure*), действующего в центре заряда (ср. Коул [1, гл. 8]). Таким путем некоторым образом учитывается вес грунта, причем не нарушаются условия сферической симметрии.

Указанный выше подход к камуфлетному движению приводит к корректно сформулированной математической задаче о распространении нелинейных упруго-пластических волн, вызываемых в бесконечной среде давлением, приложенным к поверхности сферической каверны. Сложность этой проблемы очевидна. Поэтому для некоторого упрощения анализа, как и при подводных взрывах (ср. Коул [1, гл. 8]), предполагается, что движение является изохронным. Это означает, что исключаются все волновые процессы, всюду пренебрегается либо сжимаемостью, либо инерционными эффектами. Это предположение допустимо, если не проводится прямое изучение ударной волны в грунте. В дальнейшем предполагается, что продукты взрыва находятся под действием однородного давления, что объемные изменения происходят адиабатически и что из-за излучения ударной волны энергия уменьшается до величины, равной одной трети энергии детонации. Как

известно, эти предположения оправдываются при изучении движения подводного пузыря.

Для анализа не имеет значения, какая именно часть энергии детонации уносится с ударной волной, но это сказывается на числовых результатах. Здесь предполагается равенство этой величины двум третям, причем это предположение основывается на данных о подводных взрывах. Сравнение экспериментальных и теоретических данных может привести к пересмотру этой предварительной оценки.

Описанная выше модель камуфлетного движения допускает детальный теоретический анализ, однако вычисления, требуемые для получения численных величин в частных случаях, находятся вне возможностей ручного счета. Поэтому расчеты были выполнены на вычислительных машинах I.B.M. в Олдермастоне. В разд. 6 подробно излагается теоретическая модель точечного подземного взрыва по Тейлору и Пенни. Эта фиктивная схема, являющаяся, по существу, экстраполяцией реальных условий, дает простое, но полезное приближенное описание фазы первичного расширения камуфлетной полости. В разд. 7 детально рассматривается теоретическая модель подземного взрыва сферического заряда, причем внимание обращено на фазу первичного расширения, включая ее начальные этапы, и на следующие за этой фазой пульсации. Эта вторая теория и некоторые другие разработки первоначальной теории Тейлора и Пенни принадлежат авторам данного исследования. Различные теории камуфлетного движения в рассмотренных здесь изохронных условиях хотя и весьма тесно связаны друг с другом, но проявляют некоторые важные различия. Природа этих расхождений и их причины связаны с предположениями об условиях в начале фазы первичного расширения и с некоторой свободой в выборе как упругих связей напряжений с деформациями, так и предположений, необходимых для изохронного движения. Для трех типичных идеальных грунтов приводятся числовые значения, характеризующие полностью насыщенные глины, сухой песок и частично насыщенные глины или смешанные грунты. В некоторых случаях даются численные расчеты для различных теорий и приводится их сопоставление. Значения, полученные для конечных

размеров камуфлетной полости, сравниваются с имеющимися очень ограниченными экспериментальными данными. В разд. 7 также включены некоторые соображения, касающиеся условий образования камуфлетной полости, изменений прочности грунтов из-за влияния скорости деформирования и выбора конечных упругих соотношений между напряжениями и деформациями грунтов.

3. Применение анализа размерностей к теории взрывов в грунтах

Анализ размерностей обеспечивает простой, хотя и ограниченный подход к изучению образования камуфлетной полости в грунтах. Все характеристики волнового поля (такие, как смещения, скорости, напряжения и т. д.), связанные с движением, зависят от большого числа физических свойств продуктов взрыва, грунта и атмосферы, от геометрии процесса и от гравитации. В число важных характеристик включаются вариации во времени радиуса камуфлетной полости, распределение энергии и размеры области пластических деформаций. Частные значения этих величин, соответствующие концу фаз первичного расширения и сжатия, представляют существенный интерес. Хотя формально в анализ размерностей можно включать все рассматриваемые физические параметры или по крайней мере те из них, которые имеют, по-видимому, ощутимое значение, такая общность достигается только за счет уменьшения количественной информации. Однако важность и полезность анализа размерностей физического процесса состоит в том, что он позволяет получить непосредственно законы подобия и моделирования, справедливые, разумеется, для некоторых конкретных условий.

3.1. Закон геометрического подобия Гопкинсона

Законы подобия и моделирования для взрывов в различных средах широко известны, но они используются, к сожалению, не всегда с должным пониманием пределов их применимости. Особый интерес для нас представляет закон геометрического подобия Гопкинсона, и важно правильно понять обоснование и пределы применимости этого

закона в связи со взрывами в грунтах. Торнхилл [1] сформулировал закон геометрического подобия Гопкинсона для взрывов следующим образом: «Если два взрыва идентичны во всем, кроме размеров заряда, то они математически идентичны при использовании в качестве системы единиц одного и того же основного давления и скорости и основной длины, пропорциональной линейному размеру заряда».

Доказательство закона геометрического подобия Гопкинсона для взрывов в грунтах можно провести при самых общих предположениях. Однако необходимо выяснить область применения моделей образования камуфлетных полостей, приведенных в данной работе, которые отражают существенные физические упрощения. Для нас нет необходимости конкретизировать все относящиеся к делу физические параметры продуктов взрыва, грунта и атмосферы, поскольку эти параметры сохраняются неизменными в каждом классе взрывов. Все же нужно заметить, что детальная спецификация наиболее важных из этих физических свойств необходима при любом использовании законов моделирования в связи с корреляцией эффектов взрывов различных классов, например из-за различия типов взрывчатки или грунтов. Здесь законы моделирования не рассматриваются, и исследование ограничивается законом геометрического подобия Гопкинсона.

Поскольку не нужно детально конкретизировать относящиеся к делу физические свойства, то такие эффекты, как нелинейная сжимаемость (вызывающая, по-видимому, образование ударных волн), скорость деформации, упрочнение или размягчение грунта, а также отклонения от условий сферической симметрии учитываются неявно. В данной работе ни один из этих эффектов в последующий теоретический анализ непосредственно не включается. В рассматриваемом здесь процессе глубина заложения заряда считается достаточно большой, чтобы камуфлетная полость не достигла поверхности земли. Тем не менее, если воронка образовалась, основные соображения данного раздела сохраняют силу. В случае образования камуфлетной полости возмущение, производимое в воздухе, вряд ли будет иметь существенное значение, даже при весьма неглубоких взрывах.

Предположим теперь, что после детонации движение зависит от ряда определенных величин, которые характеризуют физические свойства и геометрию продуктов взрыва, грунта и атмосферы, а также от гравитационных сил. Пусть q_{ex} , q_s и q_a обозначают совокупности этих величин. Тогда, например, в предположении о том, что продукты взрыва являются идеальным политропическим газом, в q_{ex} будут включаться скорость звука за фронтом детонации, скорость детонации и показатель адиабаты; в q_s входят упругие и пластические константы; в q_a — атмосферное давление, скорость звука и показатель адиабаты. Геометрия определяется размером, формой и местонахождением заряда взрывчатки. Этого достаточно, чтобы явно определить следующие величины:

- l , h — характерные линейные масштабы размера заряда и глубины его заложения;
- V_p — скорость продольных упругих волн в грунте;
- p_a — атмосферное давление на поверхности земли;
- g — ускорение силы тяжести.

Таким образом, согласно данной схеме, рассматриваемыми величинами являются q_{ex} , q_s и q_a (не выраженные в явном виде) совместно с l , h , V_p , p_a и g .

Пусть основными единицами давления, скорости и длины будут p_a , V_p и l . Поскольку здесь ничего не говорилось о тепловых процессах, удобно задать размерности температуры в единицах данной механической системы размерностей. В указанной выше системе основными единицами массы, длины и времени являются $M = l^3 p_a V_p^{-2}$, $L = l$ и $T = l V_p^{-1}$. Пусть через Q обозначена любая физическая величина, зависящая от движения; а $[Q]$ означает комбинацию основных размерностей (т. е. p_a , V_p и l), имеющую ту же размерность, что и Q . Тогда $Q' = Q/[Q]$ — соответствующая безразмерная (или приведенная) физическая величина. На основании известных физических законов задача о взрыве в грунтах теперь может быть в принципе полностью сформулирована как система уравнений вместе с соответствующими начальными, граничными условиями и условиями непрерывности, выраженными в безразмерной форме. Пусть x_i ($i = 1, 2, 3$) — прямоугольные декартовы координаты с началом в центре камуфлетной полости, а

t — время, отсчитываемое от некоторого подходящего момента. Тогда $x_i - x_i/l$ и $t' = V_p t/l$ — соответствующие безразмерные координаты и время. Отсюда следует, что любая величина Q' является функцией приведенных пространственных и временных переменных x'_i и t' и безразмерных модельных параметров q_{ex} , q_s , q_a , h/l и gl/V_p^2 (величины V_p и p_a постоянны и равны единице). Математически это записывается в виде

$$Q' = Q'(x'_i, t'; q_{ex}, q_s, q_a, h/l, gl/V_p^2). \quad (3.1)$$

Непосредственный анализ основных уравнений, соответствующих любой произвольной математической модели физического процесса (например, тех моделей, которые рассматриваются в последующих разделах этой статьи), может показать, что не все модельные параметры независимы. Хотя этот результат приводит к некоторому упрощению вида функции Q' , здесь он не имеет непосредственного значения.

Ограничим теперь исследование частным классом взрывов, различающихся только размером заряда l и глубиной его заложения h . Предположим далее, что относящиеся к делу величины, включенные в q_{ex} , q_s и q_a , таковы, что все их размерности могут быть представлены в виде $(p_a)^x (V_p)^y$, причем эти величины не зависят от l , в системе основных единиц p_a , V_p и l . Это предположение исключает, в частности, исследование слоистых грунтов или эффектов скорости деформаций. Модельные параметры q_{ex} , q_s и q_a , присутствующие в уравнении (3.1), являются постоянными, и их не нужно записывать в явном виде. Таким образом, для этого класса взрывов уравнение (3.1) сводится к следующему:

$$Q' = Q'(x'_i, t', h/l, gl/V_p^2). \quad (3.2)$$

Если соотношение (3.2) рассматривать как полностью не зависящее от всех модельных параметров, то для этого необходимо, во-первых, ограничиться исследованием взрывов, при которых отношение h/l постоянно (т. е. взрывов, полностью геометрически подобных), и, во-вторых, поскольку gl/V_p^2 изменяется пропорционально параметру l , можно предполагать, что функция Q' существенно не

зависит от параметра моделирования gl/V_p^2 для некоторой серии взрывов, относящихся к определенному выше классу. Тогда уравнение (3.2) принимает вид

$$Q' = Q'(x_i, t'), \quad (3.3)$$

и этот окончательный результат, выведенный при сформулированных условиях, и является математическим выражением закона геометрического подобия Гопкинсона. Этот закон, в частности, основывается на предположениях о геометрическом подобии между взрывами и о незначительности влияния гравитации и скорости деформирования. Поэтому он является в лучшем случае приближением к действительности. Особое значение этого закона обусловлено тем, что он координирует результаты, относящиеся ко всем взрывам внутри рассматриваемого класса взрывов, для которого справедливы принятые предположения. Таким образом, по известным экспериментальным данным для одного частного размера взрыва можно построить соотношения типа (3.3) и затем вычислить результаты для взрывов различных размеров. Точнее говоря, уравнение (3.3) показывает, что для любых заданных значений x_i' и t' величина Q' полностью определена, а отсюда следует, что Q пропорционально $[Q]$. Очевидно, если Q имеет размерность $M^\alpha L^\beta T^\gamma$ в единицах массы, длины и времени, то Q будет иметь размерность $p_a^\alpha V_p^{-2\alpha-\gamma} l^{\beta+\gamma+1}$ в единицах p_a , V_p и l . Таким образом, если, например, Q — длина или время процесса движения, то Q прямо пропорционально l . Следует заметить, что в случае сферической симметрии уравнение (3.3) проще записать в виде

$$Q' = Q'(r', t'), \quad (3.4)$$

где r' — приведенная радиальная координата. Допустим теперь, что в уравнении (3.4) в качестве Q взята величина радиуса a камуфлетной полости. Тогда ясно, что a' является инвариантной функцией от t' и что значения $a'_{(i)}$ и $t'_{(i)}$ ($i=1, 2, \dots$) величин a' и t' , соответствующих концу последовательных фаз расширения и сжатия, постоянны для каждого значения i независимо от размера заряда. Другими словами, $a'_{(i)}$ и $t'_{(i)}$ пропорциональны l , в частности радиус камуфлетной полости в конце фазы первичного

расширения и время расширения пропорциональны характерному линейному размеру заряда.

Аналогичные результаты можно получить и в том случае, когда заряд взрывчатки характеризуется не линейным масштабом l , а его полной массой $\mathcal{M}$ или полной выделяющейся энергией $\mathcal{E}$. Если теперь p_a , V_p и $\mathcal{M}$ (или $\mathcal{E}$) взять в качестве основных единиц давления, скорости и массы (или энергии), то основные единицы массы, длины и времени будут соответственно $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{1/3} p_a^{-1/3} V_p^{2/3}$ и $\mathcal{M}^{1/3} p_a^{-1/3} V_p^{-1/3}$ (или $\mathcal{E} V_p^{-2}$, $\mathcal{E}^{1/3} p_a^{-1/3}$ и $\mathcal{E}^{1/3} p_a^{-1/3} V_p^{-1}$ соответственно). Как и прежде, отсюда далее следует, что длины или интервалы времени, связанные с движением, прямо пропорциональны или $\mathcal{M}^{1/3}$, или $\mathcal{E}^{1/3}$. В частности, этим величинам прямо пропорциональны $a_{(i)}$ и $t_{(i)}$. Такого рода результаты являются примерами так называемого закона подобия одной трети (*кубического корня*), который является в точности обычной формой закона геометрического подобия Гопкинсона. Следует заметить, что вопреки обычному применению закон подобия кубического корня нельзя сформулировать в единицах *веса* заряда.

Было показано, что закон геометрического подобия Гопкинсона [уравнение (3.3)] справедлив при определенных ограничительных условиях. Так, в частности, должно быть пренебрежимо малым влияние гравитации, скорости деформирования и слоистости (и иных неоднородностей) грунта. Если отвлечься от влияния скорости деформирования, из физических соображений, по-видимому, следует, что необходимые условия будут удовлетворительно выполняться, если величина интенсивности напряжений окажется на много порядков выше соответствующих величин, определяемых гравитацией. Так, например, в силу наличия высоких давлений часть энергии заряда, затрачиваемая на образование ударной волны в грунте, должна фактически не зависеть как от гравитации, так и от сопротивления течению грунта. Действительно, эта часть должна почти полностью определяться изменениями сжимаемости грунта с давлением. Однако на практике не все требуемые для справедливости закона Гопкинсона условия могут выполняться в основной части движения. Закон Кулона пластического течения грунтов [см. уравнение (4.4)] означает,

что сильное давление препятствует течению, а потому сопротивление деформированию грунта возрастает с глубиной. Таким образом, в грунтах, обладающих внутренним сопротивлением трения, параметр Q , вообще говоря, нельзя считать не зависящим от модельного параметра gl/V_p^2 . Тогда уравнение (3.3) становится уже несправедливым, и, например, отношение размера камуфлетной поверхности к размеру заряда не будет постоянным. Отсюда, даже если закон Гопкинсона подтверждается экспериментами для некоторого интервала изменений размера заряда, следует ожидать, что за определенным пределом он будет нарушаться.

4. Физические свойства продуктов взрыва и грунтов

В этом разделе обсуждается механическое поведение продуктов взрыва и грунтов и рассмотрены предположения, использованные в теоретическом анализе данной статьи. Особое внимание уделяется выбору числовых значений физических параметров, необходимых для применения развиваемой теории камуфлетного движения. Для определенности исследование ограничивается ТНТ (тротилом), но в случае других ВВ анализ будет аналогичным.

Термин *естественный грунт* в данной работе относится к классу относительно мягких нецементированных геологических формаций земной коры, которые, вообще говоря, являются относительно рыхлыми конгломератами частиц различных минералов, пустоты между которыми заполнены водой, воздухом или же и тем и другим. Распределение частиц по размерам представлено фракциями глинистых частиц ила и песка. Рассматриваемый класс грунтов ограничен лишенными внутреннего трения полностью насыщенными глинами и сухими нулевого сцепления песками. Частично насыщенные глины или смешанные грунты, прочность которых определяется как трением, так и сцеплением, могут интерпретироваться как промежуточный случай. Из данного исследования исключаются хрупкие материалы, такие, как скалистые горные породы.

Напротив, термин *идеальный грунт* используется здесь для описания материала, поведение которого точно

соответствует различным обсуждаемым ниже законам, которые являются идеализацией поведения естественных грунтов. Читатель, безусловно, заметит это различие.

4.1. Продукты взрыва

Процесс детонации ВВ рассмотрен весьма подробно Коулом [1, гл. 3] и требует лишь краткого упоминания. Расчеты Джонса и Миллера [1] показывают, что при плотности заряда (т. е. плотности твердого ВВ), равной $1,5 \text{ г/см}^3$ ($93,6 \text{ фунт/фут}^3$), скорость детонации ТНТ равна 7720 м/сек ($25\,300 \text{ фут/сек}$), что удовлетворительно согласуется с экспериментальным значением, равным 6790 м/сек ($22\,300 \text{ фут/сек}$). Более того, указанные авторы рассчитали адиабатическую связь давление — плотность для продуктов взрыва, и Тейлор [2] воспользовался их данными для детального расчета характера детонационных волн. Можно заметить, что скорость детонации существенно превосходит скорости волн напряжений в грунтах (см. табл. 2). При сферическом заряде ТНТ весом в 1 фунт (радиусом $4,2 \text{ см}$, или $0,14 \text{ фут}$) детонация завершается примерно за 5 мксек , т. е. за время, гораздо меньшее, нежели получающаяся в расчетах продолжительность фазы первичного расширения при образовании камуфлетной полости в представляющих практический интерес случаях (см. табл. 9).

Условие геометрического подобия, верное за фронтом детонации, перестает выполняться, когда волна детонации достигает поверхности заряда. Первоначально возникшее движение состоит из возмущения, которое, возможно, является ударной волной, распространяющейся во внешнюю область в грунт, и волны разрежения, распространяющейся внутрь по продуктам взрыва. Теория распространения сферических ударных волн, возникающих при взрывах в твердых средах, включая металлы, грунты и горные породы, разрабатывалась в США и в СССР и в меньшей степени в Великобритании. Имеются некоторые теоретические исследования, но их применение к явлениям взрыва требует знания соответствующих определяющих уравнений при больших интенсивностях напряжений, однако в настоящее время эти сведения весьма ограничены.

По этой причине (см. также п. 2.4) в данной работе непосредственно не рассматривается процесс распространения ударной волны в грунтах. Вместо этого, как и при исследовании проблемы движения подводного пузыря (Коул [1, гл. 8]), предполагается, что движение изохронное (см. п. 5.6), т. е. всеми эффектами распространения волн пренебрегается. Для того чтобы учесть индуцированное движение и энергию, связанную с ударной волной, вводится предположение о том, что энергия детонации изохронной модели (называемая нами *камуфлетной энергией* $\mathcal{E}_{\text{кам}}$) составляет известную часть (здесь принимается равной одной трети) от истинной энергии детонации $\mathcal{E}$. И $\mathcal{E}$, и $\mathcal{E}_{\text{кам}}$ означают энергию, выделяемую при расширении продуктов взрыва до атмосферного давления. Далее, для того чтобы избавиться от необходимости исследования волнового движения в газах, предполагается, что волны достаточное число раз проходят сквозь камуфлетную полость; тогда можно считать, что изменения объема этих продуктов происходят в условиях однородных плотности и давления.

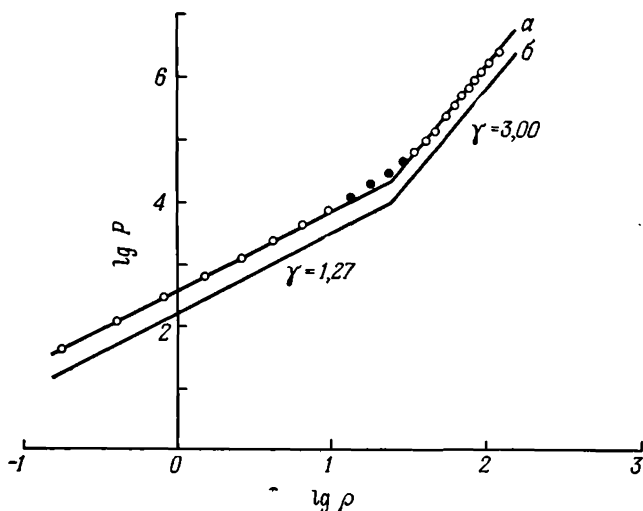
Джонс и Миллер [1] рассчитали связь между температурой, давлением и плотностью при адиабатическом расширении газообразных продуктов взрыва ТНТ для плотности заряда в 93,6 фунт/фут³. Числовые значения этих величин приведены в табл. 1, а зависимость давления от плотности представлена на рис. 2. Ясно, что график этой зависимости можно аппроксимировать двумя прямыми отрезками, пересекающимися в точке, соответствующей критической плотности. Зависимость, выраженная этими двумя линиями, соответствует взрыву с полной выделившейся энергией $\mathcal{E}$, тогда как здесь требуется зависимость, соответствующая модели взрыва с выделением энергии $\mathcal{E}_{\text{кам}} = = 1/3 \mathcal{E}$. Мы предположим, что и эта исходная зависимость также представляется двумя прямыми линиями с теми же наклонами и значениями критической плотности, как предыдущая, но занимающими место, соответствующее выделившейся энергии $\mathcal{E}_{\text{кам}}$. Другими словами, новая кривая получается жестким переносом первоначальной кривой параллельно оси давления (см. рис. 2).

Так как предполагается, что внутри продуктов взрыва сохраняются однородные условия, то закон изменения

давления газа P с радиусом камуфлетной полости a определяется соотношениями

$$P = \begin{cases} P_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma_1}, & \text{если } 1 \leq \frac{a}{a_0} \leq \frac{a^*}{a_0}, \\ P_0 \left(\frac{a^*}{a_0} \right)^{-3\gamma_1} \left(\frac{a}{a^*} \right)^{-3\gamma_2}, & \text{если } \frac{a}{a_0} \geq \frac{a^*}{a_0}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где a_0 — начальное значение величины a , a^* — значение, соответствующее критической плотности. Константы a^*/a_0 ,



Р и с. 2. Зависимость давления P (фунт/дюйм²) и плотности ρ (фунт/фут³) при адиабатическом расширении продуктов взрыва ТНТ при плотности загрузки в 93,6 фунт/фут³ (по Джонсу и Миллеру [1]).

○ — данные Джонса и Миллера [1]; α — среднее квадратичное приближение к этим данным (—●— исключенные точки); β — кривая, построенная по соотношению разд. 7.

γ_1 и γ_2 можно определить по данным табл. 1, а модифицированное начальное давление P_0 выбирается из условия, что работа, производимая продуктами взрыва при адиабатическом расширении от давления P_0 до атмосферного давления, равна $\mathcal{E}_{\text{кам}}$. На основании данных, приведенных

Таблица 1

Температура T , давление P , плотность ρ
и показатель адиабаты $\gamma = d(\ln P)/d(\ln \rho)$ при
адиабатическом расширении продуктов взрыва ТНТ
при плотности загрузки в 93,6 фунт/фут³.
Данные по Джонсу и Миллеру

$T, ^\circ K$	$P,$ фунт/дюйм ²	$\rho,$ фунт/фут ³	γ
3400	$2,303 \cdot 10^6$	$1,215 \cdot 10^2$	3,36
3200	$1,562 \cdot 10^6$	$1,056 \cdot 10^2$	2,62
3000	$1,133 \cdot 10^6$	$9,351 \cdot 10^1$	2,76
2800	$8,460 \cdot 10^5$	$8,412 \cdot 10^1$	2,92
2600	$6,340 \cdot 10^5$	$7,623 \cdot 10^1$	3,10
2400	$4,696 \cdot 10^5$	$6,920 \cdot 10^1$	3,27
2200	$3,334 \cdot 10^5$	$6,230 \cdot 10^1$	3,30
2000	$2,200 \cdot 10^5$	$5,495 \cdot 10^1$	3,05
1800	$1,291 \cdot 10^5$	$4,607 \cdot 10^1$	2,76
1700	$9,058 \cdot 10^4$	$4,054 \cdot 10^1$	2,39
1600	$6,263 \cdot 10^4$	$3,474 \cdot 10^1$	2,09
1500 ¹⁾	$4,251 \cdot 10^4$	$2,888 \cdot 10^1$	1,86
1400 ¹⁾	$2,824 \cdot 10^4$	$2,318 \cdot 10^1$	1,68
1300 ¹⁾	$1,833 \cdot 10^4$	$1,792 \cdot 10^1$	1,54
1200 ¹⁾	$1,157 \cdot 10^4$	$1,329 \cdot 10^1$	1,42
1100	$7,081 \cdot 10^3$	$9,449 \cdot 10^0$	1,37
1000	$4,177 \cdot 10^3$	$6,424 \cdot 10^0$	1,32
900	$2,358 \cdot 10^3$	$4,170 \cdot 10^0$	1,29
800	$1,263 \cdot 10^3$	$2,570 \cdot 10^0$	1,27
700	$6,324 \cdot 10^2$	$1,494 \cdot 10^0$	1,27
600	$2,899 \cdot 10^2$	$8,071 \cdot 10^{-1}$	1,27
500	$1,183 \cdot 10^2$	$3,976 \cdot 10^{-1}$	1,27
400	$4,087 \cdot 10^1$	$1,721 \cdot 10^{-1}$	1,27

¹⁾ Данные, опущенные при определении констант в уравнении (4.1) методом наименьших квадратов.

в последнем столбце табл. 1, γ_1 и γ_2 принимают соответственно точные значения 3,00 и 1,27. Тогда применение метода наименьших квадратов к данным табл. 1, за исключением значений из интервала от 1200 до 1500° К (см. табл

1 и рис. 2), приводит к соотношению

$$\frac{a^*}{a_0} = 1,530. \quad (4.2)$$

Для ТНТ ($C_7H_5O_6N_3$) энергия детонации равна 247,9 ккал/моль (см. Джонс и Миллер [1]), а молекулярный вес равен 227,141. Отсюда следует, что

$$P_0 = 4,882 \cdot 10^5 \text{ фунт/дюйм}^2, \quad (4.3)$$

если атмосферное давление принимается равным 14,7 фунт/дюйм².

4.2. Грунты

Теоретическое изучение задач механики грунтов затруднительно даже в том случае, если ограничиться только проектными задачами гражданского строительства. Это вызвано тем, что механическое поведение естественного грунта под воздействием приложенного напряжения весьма сложно, изменчиво и не полностью уяснено. Кроме того, как заметил Терцаги [1, гл. 1], неоднородность грунтовых масс любой поддающейся оценке меры исключает возможность полной спецификации физических данных в задачах механики грунтов. Таким образом, интерпретация теоретических предсказаний требует навыка в накоплении опыта и обдумывании.

Из приведенных замечаний следует, что теоретические исследования в механике грунтов по необходимости связаны с идеальными грунтами, физические свойства которых аппроксимируют свойства естественных грунтов. Такой путь может дать полезную информацию, если, конечно, помнить о неопределенности истинной картины. Попытки ввести усовершенствования, в большей степени учитывающие физические свойства грунтов, будут приводить к усложнению анализа, и увеличение точности аппроксимации будет достигаться за счет роста трудоемкости расчетов, вероятно неоправданного для задач гражданского строительства, но вполне допустимого в задачах о взрыве.

Проблеме механических свойств естественных грунтов посвящена обширная литература. Приведем ее краткий обзор, необходимый для оценки обоснованности и пределов

применения принятого в данном исследовании понятия идеального грунта. Дополнительные сведения читатель найдет в руководстве Терцаги [1] и в обзорной статье Скемптона и Бишопа [1].

При любом анализе образования камуфлетной полости необходимо использовать определяющие уравнения, справедливые в гораздо большем диапазоне напряжений, деформаций и скоростей деформаций, чем это встречается в практике гражданского строительства. Соответствие математической модели физическому процессу можно поэтому оценить только апостериори путем прямого сопоставления результатов эксперимента и теоретических расчетов. Идеальный грунт, рассматриваемый в этой статье, определяется как твердое тело, подчиняющееся закону Гука в упругой области и условию текучести Кулона при ограничениях, накладываемых идеальным пластическим течением. Можно ожидать, что эта идеализированная среда будет служить удовлетворительной моделью естественных грунтов до тех пор, пока исследуется механическое поведение при нормальных условиях малых напряжений и т. д., но не известно, насколько удачно идеальные грунты описывают поведение естественных грунтов в условиях взрыва. Поэтому принимаемое в данной работе допущение о том, что идеальный грунт при всех условиях представляет с достаточной полнотой механические свойства естественных грунтов, нужно считать рабочей гипотезой и подвергнуть проверке в свете дальнейших экспериментальных доказательств. Предположение об идеальной пластичности означает прямое исключение всех таких физических эффектов (упрочнение или размягчение, скорость деформирования), которые могут влиять на предел текучести грунтов. Однако, поскольку средние деформации и скорости деформаций известны или доступны оценке, можно провести приближенный учет этих эффектов, если придать пределу текучести подходящее номинальное значение.

Даже в обычных условиях физические свойства естественных грунтов, измеряемые в поле и в лаборатории, и соответствующие свойства идеальных грунтов никоим образом не совпадают. По этой причине в механике грунтов неизбежны расхождения между теорией и практикой (см. Терцаги [1, гл. VII, VIII]).

4.2.1. Прочностные характеристики и структура естественных грунтов в обычных условиях

Согласно принятой здесь интерпретации, под термином *грунт* подразумеваются (в порядке возрастания крупности текстуры) глины, илы и пески. Таким образом, грунт является относительно рыхлым конгломератом частиц минералов, пустоты между которыми заполнены водой, воздухом или же и тем и другим.

Существует фундаментальное различие в прочности грунтов со сцеплением (таких, как глины) и конгломератов частиц без сцепления (таких, как сухие пески). Свойства сцепления и трения в грунтах определяются существенно различными типами сил взаимодействия между соответствующими грунтовыми частицами. Предположим, что образец грунта состоит из смеси частиц минералов, размеры которых распределены в интервале, скажем, от 0,02 до 2 мм. Тогда для частиц всех размеров силы трения действуют на контактах между частицами. Кроме того, имеются силы сцепления между частицами, роль которых возрастает с уменьшением размеров частиц. В общем случае имеются в наличии оба этих эффекта, а распределение частиц грунта по размерам и интенсивности приложенных напряжений определяет их относительный вклад в механическое поведение объема грунта.

При таком представлении грунт рассматривается, по существу, как зернистая структура, но его сопротивление деформированию зависит также от содержания воды и воздуха в пустотах и от внешних условий, налагаемых в процессе деформирования. Рассмотрим теперь прочностные характеристики образца полностью насыщенного грунта, в котором, по крайней мере сначала, все поровое пространство занято водой. Вода гораздо менее сжимаема, чем скелет грунта, и, следовательно, в условиях *отсутствия дренирования*, когда сохраняется естественное водосодержание, приложенная нагрузка воспринимается в основном водой. Так как при этом давление на контактах между зернами не возрастает, силы трения не имеют значения и грунт ведет себя как материал без внутреннего трения. С другой стороны, в условиях *полного дренирования* естественное

водосодержание уменьшается, вода может свободно уходить из образца в процессе деформирования. Тогда приложенные силы воспринимаются зернистым скелетом, и грунт проявляет сцепление и внутреннее трение.

Теоретическое и экспериментальное исследование прочностных характеристик насыщенных грунтов было выполнено Бишопом и Элдином [1], и можно считать установленным фактом исчезновение сопротивления трению в диапазоне насыщенных грунтов. Предположим, что образец грунта первоначально почти полностью насыщен. Тогда под воздействием достаточно высоких давлений воздух в поровом пространстве сжимается и растворяется в воде, и при сжатии пустот может быть достигнуто состояние полного насыщения. В этих условиях сопротивление трению образца падает до нуля, хотя, возможно, вначале оно было весьма высоким.

Можно заметить, что в механике грунтов принято иметь дело с *эффективными*, а не с *истинными* напряжениями. Компоненты тензора эффективных напряжений (в некоторой прямоугольной декартовой системе координат) определяются как $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + u \delta_{ij}$, где u — давление поровой воды, а σ_{ij} — истинные компоненты напряжения. Тогда понятие о трении между частицами формулируется с помощью компонент σ'_{ij} . Вопрос о дренаже не возникает, поскольку установлено, что, например, в условиях нулевого дренажа нормальная компонента вектора эффективного напряжения на контакте между зернами равна нулю, а потому сопротивление трению отсутствует. Такая формулировка данной проблемы включает, однако, раздельное изучение движения скелета грунта и поровой воды и требует также уравнения, описывающего течение поровой воды через скелет (см. Скемpton и Бишоп [1]).

Модель механического поведения грунта, согласно которой естественный грунт представляется как двухкомпонентная система, состоящая из пористого упругого тела, через которое может просачиваться вода, была предложена Био [1], [3]. Предложенная им теория применялась для изучения различных процессов, характеризующих малыми деформациями, в частности в задачах консолидации грунтов (Био [2], [4]; Био и Клигган [1], [2]) и распро-

странения волн (Био [5], [6]). Данный анализ, в котором грунт рассматривается как однофазная система, математически более гибок, нежели теория Био, и, кроме того, продолжительность фазы первичного расширения настолько мала, что кажется невероятным заметное влияние на общее движение грунта миграции поровой воды через скелет минеральных частиц.

а) *Глины*. Глинистые грунты широко исследованы в виду их важности для гражданского строительства. Глины в основном являются конгломератом мелких частиц минералов совместно с водой и воздухом, обычно присутствующими в пустотах между зернами. Присутствием этих мелких частиц объясняется проявляемое в глинах свойство сцепления. Глины относительно непроницаемы, а это означает, что все (за исключением наиболее медленных) деформации полностью насыщенных образцов могут рассматриваться как происходящие в отсутствие дренажа, движение поровой воды сдерживается структурой глины. Таким образом, полностью насыщенные глины обычно ведут себя так, как если бы трение в них отсутствовало. Этот эффект виден из результатов, полученных Терцаги (см. Бишоп и Элдин [1, стр. 14]), который обнаружил в опытах, проведенных на идентичных образцах глины, что угол внутреннего трения составлял около $1/2^\circ$ при нормальных скоростях нагружения и около 23° при исключительно медленных скоростях, когда были предприняты меры, обеспечивающие дренаж.

б) *Пески*. Основная структура сухих песков гораздо проще, чем структура глин. Средний размер частиц песка еще мал, хотя на порядок выше среднего размера частиц глин, а пустоты в сухом грунте полностью заполнены воздухом. Среда практически не обладает сцеплением и в действительности несжимаема (если исключить возможность небольшой упаковки) до тех пор, пока не происходит разрушения отдельных зерен. Когда сжимают образец сухого грунта, внешняя нагрузка воспринимается исключительно силами, действующими на контактах между частицами. Тангенциальные компоненты этих сил учитываются в общем сопротивлении деформированию. Полностью насыщенные грунты не обладают заметной прочностью трения при отсутствии дренирования, а потому оказывают незначи-

тельное сопротивление деформированию. Частично насыщенные грунты обладают сопротивлением трения, а кроме того, и некоторым сцеплением.

в) *Прочие грунты.* Предыдущие замечания содержат широкое качественное описание структуры и физических свойств, влияющих на сопротивление деформациям глин и песков. Ил можно рассматривать как промежуточную между глинами и песками породу, и большинство естественных грунтов является смесью этих основных типов. В общем случае грунты обладают сопротивлением сцепления и трения, но в силу чувствительности этих свойств к внешним условиям они характеризуются физическими параметрами, а не константами.

4.2.2. Механические свойства идеальных грунтов

Предположим, что образец естественного грунта деформируется под действием возрастающего одноосного сжимающего напряжения. Если это напряжение удовлетворяет определенному условию текучести, характеризующему материал и зависящему от условий опыта, грунт течет. Под воздействием возрастающего одноосного растягивающего напряжения разрушение происходит даже при более низких напряжениях, но из-за разрыва, а не из-за течения. Напряжения, действующие в грунтах при расширении камуфлетной поверхности, в основном являются сжимающими, а в этих условиях грунты подвергаются главным образом деформации течения. Естественно, что в непосредственной близости от поверхности полости возникают трещины, но этот эффект еще не может быть включен в теоретический анализ. В данной статье предполагается, что подвергаемые деформированию области грунта сохраняются непрерывными, причем их механическое поведение описывается соответственно уравнениями движения и определяющими уравнениями, которые при надлежащих начальных условиях и условиях непрерывности определяют распределение плотности, напряжений, скоростей и смещений.

Предполагается, что условие течения идеального грунта можно получить из закона Кулона [1], который утверждает, что критическое значение касательного напряжения

зависит от двух физических параметров, а именно от сцепления c и угла внутреннего трения φ . Пусть σ и τ — нормальное и касательное напряжения соответственно, действующие на элемент плоской поверхности, проведенной через одну из точек в области грунта. Закон Кулона утверждает, что пластическое течение в этой точке возникает тогда, когда

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (4.4)$$

для некоторой ориентации элемента поверхности. Когда соотношение (4.4) обычно используется для описания поведения естественных грунтов, оказывается, что величины c и φ должны рассматриваться как эмпирические параметры, значения которых зависят от условий опыта (например, от дренажа), а также от таких факторов, как скорости деформаций и изменения объема. Однако для идеальных грунтов c и φ являются, по определению, константами. Соппротивление сдвигу естественных грунтов можно проанализировать в связи с их истинным сцеплением и углом внутреннего трения (см. Скемpton и Бишоп [1]), но для большинства практических целей прочность гораздо удобнее выражать через определенные выше эмпирические параметры.

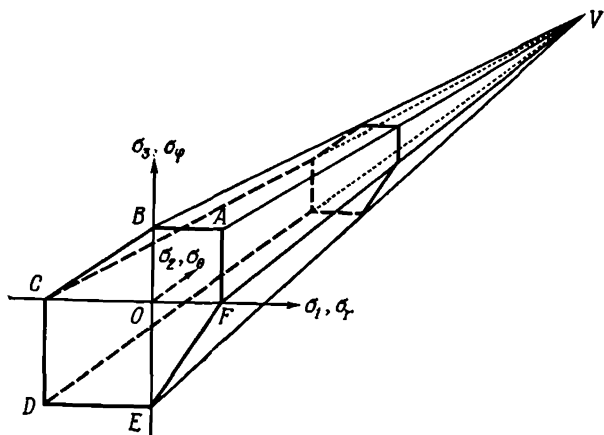
Хотя имеется разумно близкое соответствие между поведением естественных и идеальных грунтов в обычных условиях, поведение естественных грунтов в условиях взрыва неизвестно. Поэтому для предсказания результатов образования камуфлетной полости в естественных грунтах использование модели, основанной на понятии об идеальных грунтах, связано с значительной экстраполяцией. Однако, по-видимому, лучше, например, учесть влияние сил трения в предварительной формулировке, которая позже может быть модифицирована в свете дальнейших данных о их природе, чем исключить их влияние полностью.

Прежде чем вводить закон Кулона [уравнение (4.4)] в механику сплошной среды, следует установить его вид в инвариантной форме. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные компоненты напряжений. Шилд [1] показал, что искомая форма имеет вид

$$\sigma_3 - \sigma_1 = 2c \cos \varphi - (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \varphi \text{ при } \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3, \quad (4.5)$$

причем для других возможных соотношений между главны-

ми напряжениями справедливы аналогичные соотношения. Следует заметить, что закон Кулона, определяющий появление пластического течения в грунтах, является обобщением закона Треска для пластического течения в металлах. Если ограничиться изучением напряженных состояний, у которых ни одна из величин $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не превосходит $c \operatorname{ctg} \varphi$, то в пространстве главных напряжений уравнения



Р и с. 3. Поверхность текучести Кулона в пространстве главных напряжений.

(4.5) определяют совокупность шести плоскостей, образующих гексагональную пирамиду, изображенную на рис. 3. Для заданной прочности грунта (по предположению изотропного, но не обязательно однородного) положение и форма этой пирамиды определяются значениями c и φ , а напряженное состояние должно соответствовать точке, расположенной внутри или же на поверхности пирамиды. Если эта изображающая точка находится на поверхности пирамиды, то условия возникновения пластического течения выполняются. Заметим попутно, что пластическое поведение природных грунтов не обязательно связано с какой-либо действительной текучестью составных частиц; остаточные деформации в грунтах являются главным образом результатом переориентации частиц, сопровождаемой скольжением на межзерновых контактах. Могут иметь

место также некоторые небольшие изменения начального объема, а может быть, и разрушение более крупных зерен.

Вначале природные грунты проявляют, по-видимому, линейный тип деформаций, описываемый законом Гука, хотя, вообще говоря, имеется некоторая зависимость от скорости деформации: так называемые упругие константы меняются в зависимости от скорости нагружения. Однако нельзя считать, что все грунты проявляют полную упругую обратимость, и это зависит от предыстории грунта. Как будет показано ниже, анализ осложняется тем фактом, что еще до появления текучести могут возникнуть конечные деформации в условиях, когда прочность грунта существенно увеличивается из-за высокой интенсивности напряжений, так что теория линейной упругости перестает выполняться.

В статически определимых задачах (см. Хилл [2]) условие текучести Кулона (4.5) вместе с уравнениями равновесия оказывается достаточным для нахождения возможного распределения напряжений в области пластического течения грунта. Хотя этот способ принят в классической теории давления грунтов (см. Прагер [3]), он применим только к определенным случаям. Недостатки этой теории, замеченные впервые в ходе развития теории пластичности металлов, возникают из-за того, что закон Кулона не определяет ни изменений в деформациях, следующих за началом пластического течения, ни возможных изменений в сопротивлении деформациям в ходе процесса. Если воспользоваться терминологией теории пластичности металлов (см., например, Хилл [2, гл. 2]), уравнение (4.5) определяет *начальную поверхность текучести*. Отсюда по аналогии немедленно следует, что точки, расположенные внутри этой поверхности, соответствуют упругим напряженным состояниям, а точки, лежащие на ней, — *начальным пластическим* напряженным состояниям. Более того, это означает, что течение идеального грунта можно описать *ассоциированным* законом течения (см. Прагер [1]). Это открывает возможность формального построения полной теории упруго-пластических идеальных грунтов, которая отличается от теории пластичности металлов только формой функции начальной текучести (зависящей для грунтов от среднего значения главных напряжений). Этот подход, по-видимому,

оправдан в случаях, когда рассматриваются проблемы начального пластического течения. Однако в задачах о продолжающемся пластическом течении нужно принимать *неассоциированные* законы течения, поскольку, как показано в разд. 5, использование ассоциированных законов течения приводит к нереальной возможности неограниченной дилатансии. Таким образом, соображения, основанные на предположенной выше аналогии, подвергнуты некоторым ограничениям. Способность грунтов сопротивляться продолжающемуся деформированию при пластическом течении, как и у ковких металлов, в какой-то мере зависит от скорости и величины деформации, поэтому концепция идеальной пластичности обладает одинаковыми ограничениями как для грунтов, так и для металлов. В настоящее время теория пластичности грунтов ограничивается в основном исследованием пластического состояния с дополнительным условием о пластической несжимаемости при непрерывном пластическом течении. Непротиворечивые теории пластичности грунтов с учетом согласованных полей напряжений и скоростей впервые были предложены Друккером и Прагером [1] и Друккером [1], а затем развиты Шилдом [1], Чедвиком [1], [2], Хейзорнсвейтом [1], Коксом, Исоном и Гопкинсом [1] и Коксом [1]. Современный анализ текучести и характера течения природных грунтов был дан Хейзорнсвейтом [2]. Имеется также много русских работ по этой проблеме, ссылки на которые содержатся в указанных выше статьях.

Изложенное выше рассмотрение ограничивалось поведением грунтов в процессе нагружения. Однако для изучения фазы сжатия при образовании камуфлетной полости необходимо рассмотреть их поведение при разгрузке. В этом случае имеется еще меньше доступных данных, и предполагается, что здесь также можно воспользоваться аналогией с пластичностью металлов. Принимается, что характер разгрузки, более подробно рассматриваемый в п.6.1.2. и 7.1.7, является предельным в том смысле, что деформации природных грунтов будут обратимыми в меньшей степени, чем это следует из теории. Как будет показано, основной вывод, вытекающий из рассмотрения фазы сжатия, состоит в том, что у идеальных грунтов степень сжатия, вообще говоря, пренебрежимо мала. В силу пре-

дыдущих замечаний этот вывод, вероятно, предварителен для природных грунтов.

Континуальная теория упругих идеально пластических деформаций идеального грунта теперь сформулирована. Эта теория включает пять физических величин: две упругие константы, например модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , две пластические константы — сопротивление сцепления c и угол внутреннего трения ϕ , и начальную плотность ρ_0 . Свойства этой сплошной среды, согласно теории пластичности грунта, гораздо проще, чем свойства природных грунтов, даже когда последние в достаточной степени однородны. Теория, таким образом, наверняка приближенна, и точность ее выводов должна быть проверена путем прямого сравнения с экспериментальными данными в тех процессах, для которых они были определены.

4.2.3. Значения физических констант

Задача выбора числовых значений указанных выше упругих и пластических констант, соответствующих конкретным проблемам механики грунтов, не является простой. Это в основном происходит потому, что выбранный грунт обычно состоит из трех компонент (твердые частицы, жидкость и газ), и это положение не учитывается в изложенной выше феноменологической континуальной теории. Для того чтобы упростить теоретическое исследование, грунт предполагается изотропным и однородным. Обширные, совершенно однородные массивы природных грунтов существуют, например, в отложениях глин и песчаных пустынях, но в общем многие факторы, в основном зависящие от размеров рассматриваемого массива, вызывают заметные отклонения от условий однородности. Среди этих факторов — анизотропия каждого отдельного пласта, вызванная неоднородностью процесса отложения и давлением вышележащей толщи земли; поверхности разрывов, возникающие из-за сбросов и из-за наложения различных пластов, а также изменчивость водосодержания, которая обычно заметна около земной поверхности в связи с изменчивостью погоды, а также там, где существенно влияние уровня грунтовых вод. Таким образом, физические свойства грунтов в их естественном состоянии, вероятно, редко

известны со сколько-нибудь высокой степенью точности: даже в том случае, когда интересующие нас физические свойства отобранных образцов грунта могут быть определены достаточно точно в лабораторных условиях, оценка по таким измерениям общих физических свойств массивов грунта на месте их залегания вносит существенную неопределенность. Кроме того, имеется дополнительная трудность в экстраполировании значений физических констант на гораздо большие деформации и скорости деформаций, чем встречающиеся обычно при экспериментальном исследовании механических свойств грунта. Из-за этих трудностей всякий раз, когда это удобно, обычно рекомендуется рассматривать серию значений, покрывающих возможный диапазон условий, реализуемых в каждом частном случае.

Предполагается, что последующее изучение числовых значений пяти указанных выше физических величин, характеризующих идеальные грунты, является достаточно общим, чтобы включить в себя все определенные в введении типы грунтов, и в то же время достаточно полным, чтобы описать конкретный грунт. Таким образом, предполагаются известными подробные физические данные для определенных грунтов, которые распадаются на три основных класса: полностью насыщенные глины при $c > 0$ и $\varphi = 0$ (грунт S), частично насыщенные глины и смешанные грунты при $c > 0$ и $\varphi > 0$ (грунт P) и сухие пески при $c = 0$ и $\varphi > 0$ (грунт Z). Позднее оказалось также необходимым рассмотреть глины с небольшим внутренним трением (грунт MS , см. п. 7.1.7). Поскольку рассматриваются крупномасштабные характеристики образования камуфлетной полости, оказывается, что наиболее важными константами грунта являются c и φ . По этой причине каждой паре значений c и φ , соответствующих грунту из указанных выше классов, приписывается только одна пара величин E и ν , принимаемая в качестве типичной для всех грунтов рассматриваемого класса.

а) *Упругие константы.* Вообще говоря, упругие константы E и ν , используемые в теоретическом анализе, являются независимыми. Но модуль сдвига $\mu = E/[2(1+\nu)]$ является единственной упругой постоянной, фигурирующей в работе Пенни, а в предлагаемой здесь теории несжимаемого материала используется только модуль E .

Пусть V_p и V_s — скорости распространения продольных и поперечных волн. Тогда

$$V_p^2 = \frac{E(1-\nu)}{\{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)\}}, \quad V_s^2 = \frac{E}{\{2\rho_0(1+\nu)\}} = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (4.6)$$

и ν выражается через отношение $V_s/V_p (< 1)$ в виде

$$\nu = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_p^2 - V_s^2}{V_p^2} \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Таким образом, значения ν и μ легко вычисляются по экспериментальным данным для скоростей упругих волн V_p и V_s . Значения V_p в отложениях глины часто получают по наблюдениям за отражениями сейсмических волн, однако величины V_s весьма редко замеряются в полевых условиях. Иллюстративные значения скоростей упругих волн и другие данные для некоторых типов глинистых грунтов, приведенные в табл. 2, даны Райтом (1958, частное сообщение).

Таблица 2

Значения скоростей упругих волн и другие данные
для некоторых типов глинистых грунтов

Грунт	V_p , фут/сек	V_s , фут/сек	ν	μ , фунт/дюйм ²	ρ_0 , фунт/фут ³
Очень мягкий грунт (Дер- сингам)	5000	1500	0,45	$4,9 \cdot 10^4$	101
Пеуплотнен- ная глина (Фоулиесс)	5000	1500	0,45	$5,8 \cdot 10^4$	119
Оксфордская глина (Стю- артбай)	5000	2000	0,40	$9,4 \cdot 10^4$	109

Можно заметить, что для грунтов, перечисленных в табл. 2, значения ν близки к 0,5. В исследовании Чедвика [1] квазистатического расширения сферической каверны в идеальном грунте было обнаружено, что пренебрежение сжимаемостью грунта оказывает весьма малое влияние на

числовые результаты. Этот вывод, по-видимому, сохраняет свою силу и в динамической теории движения камуфлетной поверхности, но исключение движения упругих волн приводит к трудностям в интерпретации результатов расчетов о распределении энергии.

Числовые значения модуля Юнга, принятые для трех основных типов грунтов, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Числовые значения физических параметров основных типов идеальных грунтов

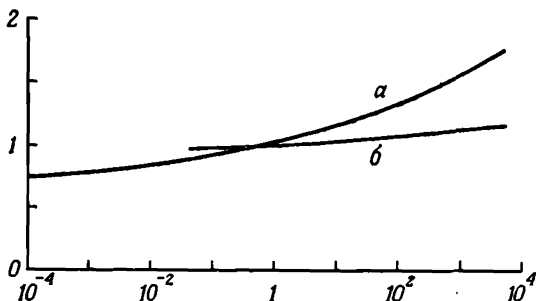
S — полностью насыщенная глина без трения; *P* — частично насыщенная глина или смешанный грунт; *Z* — сухой грунт без сцепления; *MS* — глина со слабым трением (ср. с грунтом *S* и см. п. 7.1.7).

Грунт	E , фунт/дюйм. ²	c , фунт/дюйм. ²	ϕ , град	ρ_0 , фунт/фут ³
<i>S</i>	$1,5 \cdot 10^6$	20	0	125
<i>P</i>	$8 \cdot 10^4$	15	10	125
<i>Z</i>	$2 \cdot 10^4$	0	30	100
<i>MS</i>	$1,5 \cdot 10^6$	20	1	125

Из экспериментальных данных следует, что поведение грунтов является скорее вязко-упругим, нежели упругим, поскольку значения E и ν зависят от частоты. Поэтому при теоретическом анализе в механике грунтов нужно строго учитывать изменения этих величин. Однако что касается процесса образования камуфлетной полости, то здесь предварительное исследование показывает, что крупномасштабные характеристики движения весьма слабо зависят от величин упругих параметров. В связи с этим здесь используются постоянные значения, полученные по измерениям волн напряжений, а потому относящиеся к нужному диапазону частот.

б) *Пластические константы*. Экспериментально определенные величины сцепления и угла внутреннего трения грунтов широко освещались в литературе, но в основном они соответствуют статическим испытаниям. В полностью насыщенных грунтах в условиях отсутствия дренажа $\phi=0$. В глинистых грунтах значения c , как правило, ле-

жат в диапазоне от 0 до 20 *фунт/дюйм²*, но в исключительно жестких глинах параметр s может достигать таких больших значений, как 40 *фунт/дюйм²*. Другая предельная область рассматриваемых здесь типов грунтов представлена сухими песками, которые обладают нулевым сцеплением и углом внутреннего трения ϕ в диапазоне от 30 до 45° в зависимости от распределения частиц по размерам и их формы. Во всем диапазоне свойств грунтов обычно реализуются в основном комбинации значений s и ϕ из интервала указанных выше значений для песков и глин.



Р и с. 4. Зависимость относительной прочности от скорости деформации (в процентах в минуту) для глин *а* и песка *б* по Тейлору и Казагранде и Шэннону, согласно Скемptonу и Бишопу [1].

В качестве единицы измерения взята прочность при скорости деформации 1% в минуту.

В динамических условиях было проведено весьма ограниченное число измерений s и ϕ . Особое значение имеют данные, опубликованные Тейлором, а также Казагранде и Шэнноном (см. Скемpton и Бишоп [1]), которые показывают, что при росте скорости деформации от нуля до $1,5 \text{ сек}^{-1}$ прочность глин и песков возрастает соответственно в 2 и 1,2 раза. Эти данные представлены на рис. 4. При камуфлетном движении скорости деформации — в определенные моменты времени и в определенных местах — гораздо выше чем $1,5 \text{ сек}^{-1}$. Однако исследование, проведенное в п. 7.1.6, показывает, что средние (по времени и по объему) значения гораздо меньше, чем эти максимальные величины, и имеют порядок от 5 до 10 сек^{-1} на 1 *фунт* взрывчатого заряда (и еще меньше для больших размеров), и нетрудно

экстраполировать прочностные данные, полученные при умеренных нестационарных условиях нагружения, до указанного порядка величин скоростей деформаций. Эффекты скоростей деформирования в грунтах еще недостаточно изучены, но для глин одной из причин их существования служит, по-видимому, сопротивление течению поровой воды.

Числовые значения величин сцепления и углов внутреннего трения, принятые для трех основных типов грунта, приведены в табл. 3.

в) *Плотность*. Было выполнено большое число точных измерений плотности образцов грунта. В большинстве случаев они приводят к значениям в диапазоне от 100 до 140 фунт/фут³. Числовые значения плотности, принятые для трех основных типов грунтов, приведены в табл. 3.

Из предыдущего рассмотрения ясно, что выбор числовых значений физических параметров для использования при теоретическом анализе механики камуфлетного движения не так прост. Однако можно думать, что для общих сведений о характере взрыва принятые данные об идеальных моделях трех основных типов природных грунтов являются достаточно реалистичными. Если же потребуются результаты для конкретных грунтов, должны быть тщательно выбраны соответствующие значения параметров грунта при учете всех имеющихся экспериментальных данных.

Наконец, нужно заметить, что обычно в механике грунтов ведут отсчет напряжения от атмосферного давления. Таким образом, цитированные значения сцепления грунта обычно соответствуют относительному сцеплению $c^* = c + p_a \operatorname{tg} \varphi$ (см. Кокс и др. [1], стр. 33).

При любом применении данной теории нужно заботиться о выяснении, с каким сцеплением имеют дело в действительности. Для того чтобы показать различие, возникающее при использовании c^* вместо c , заметим, что у большинства грунтов значения c и φ находятся в диапазоне $0 \leq c \leq 20$ фунт/дюйм² и $0 \leq \varphi \leq 40^\circ$, тогда как p_a примерно равно 15 фунт/дюйм². Поэтому оба члена в выражении для c^* сравнимы по величине. Для песков, у которых c очень мало, а φ около 40° , второй член $p_a \operatorname{tg} \varphi$ играет главную роль по сравнению с первым.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ИДЕАЛЬНЫХ ГРУНТОВ

5. Сферическое упруго-пластическое течение

В данном разделе развивается общая теория сферического упруго-пластического течения в идеальных грунтах, которая является основой предлагаемого исследования образования камуфлетной полости в условиях сферической симметрии. В рамках определенных оговоренных предположений, которые соответствуют упрощению истинной физической картины (см. п. 2.4 и разд. 4), приводимый анализ является точным; он основывается на законах сохранения массы и импульса в уравнениях, описывающих упруго-пластическое течение без разрушения.

5.1. Предварительные предложения

Камуфлетная полость образуется из-за расширения сжатых газов в условиях высоких температур и давлений. При числовых расчетах, приводимых в последующих разделах, предполагается, что закон изменения давления газа на камуфлетную поверхность задан уравнениями (4.1)—(4.3), за исключением одного специального случая, рассмотренного в п. 6.1.3. Исследуемое движение связано с большими упруго-пластическими деформациями, которые быстро возникают в условиях сферической симметрии в бесконечной области, занятой однородным изотропным грунтом. Механические свойства грунта такие же, как у идеального материала, подчиняющегося закону Гука в упругой области, а также критерию текучести Кулона и ассоциированному закону течения (хотя этот закон позднее модифицируется) с ограничениями, накладываемыми идеальным пластическим течением. Грунт соответственно характеризуется пятью физическими константами: модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν , сопротивлением сцепления c , углом внутреннего трения ϕ и начальной плотностью ρ_0 (см. п. 4.2.2). Можно заметить, что критерий текучести Кулона и ассоциированный закон течения для грунтов сводится, в частном случае нулевого внутреннего трения, к условию текучести Треска и ассоциированному закону течения для пластических металлов. Следовательно,

данный анализ применим к металлам так же, как и к грунтам. Однако первый случай является более простым, а значения соответствующих физических констант для грунтов и металлов существенно различны, так что эти два случая лучше исследовать в отдельности. Подробный обзор работ по динамическому расширению сферических каверн в металлах был дан Гопкинсом [1].

5.2. Основные уравнения

Пусть r — расстояние, измеряемое от центра камуфлетной полости, a — текущий радиус полости, а t — время, измеряемое с момента, когда камуфлетная полость начала расширяться. Предполагается, что грунт вначале покоился, но не был свободен от напряжений (см. п. 5.4). Все параметры процесса являются функциями только независимых переменных r и t .

Рассматриваются большие деформации материала, причем выбирается эйлерово представление движения. Требуется сформулировать уравнения, достаточные для определения распределения перемещений, скоростей, напряжений и плотностей в каждый момент времени.

Пусть r , θ , φ — сферические полярные координаты с началом в центре камуфлетной полости. Условие сферической симметрии требует, чтобы радиальная компонента скорости v , главные компоненты напряжений σ_r , σ_θ и $\sigma_\varphi \equiv \sigma_\theta$, а также главные компоненты скоростей деформаций ϵ_r , ϵ_θ и $\epsilon_\varphi \equiv \epsilon_\theta$ не были равны тождественно нулю. Использование в данной статье точки сверху, или D/Dt , означает дифференцирование вдоль движения материальной точки, т. е. $\dot{F} = DF/Dt = \partial F/\partial t + v(\partial F/\partial r)$ для любой заданной функции F . Однако нужно заметить, что, строго говоря, использование обычных символов $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_\theta$, $\dot{\epsilon}_\varphi$ ($\equiv \dot{\epsilon}_\theta$) для обозначения скоростей деформаций нарушает это определение, поскольку эти величины определяются равенствами (5.1) по особому правилу, а не так, как скорости изменения других величин. Компоненты тензора деформаций ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_φ ($\equiv \epsilon_\theta$) не используются непосредственно для анализа в данной статье, они неявно определяются уравнениями (5.1) и определением смысла обозначения «точка сверху».

Скорости полных деформаций выражаются через v следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v}{r}. \quad (5.1)$$

Скорости упругих деформаций $\dot{\epsilon}_r^e$ и $\dot{\epsilon}_\theta^e$ предполагаются определенными в виде

$$E\dot{\epsilon}_r^e = \dot{\sigma}_r - 2\nu\dot{\sigma}_0, \quad E\dot{\epsilon}_\theta^e = (1 - \nu)\dot{\sigma}_0 - \nu\dot{\sigma}_r. \quad (5.2)$$

По понятным причинам идеальный материал, удовлетворяющий этим уравнениям, можно назвать *конвективно-звуковым* (см. также п. 7.2). Скорости пластических деформаций $\dot{\epsilon}_r^p$ и $\dot{\epsilon}_\theta^p$ тогда определяются соотношениями

$$\dot{\epsilon}_r^p = \dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_r^e, \quad \dot{\epsilon}_\theta^p = \dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_\theta^e. \quad (5.3)$$

Напряженное состояние произвольно выбранной материальной точки в каждый момент времени можно охарактеризовать точкой в трехмерном пространстве с главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в качестве прямоугольных декартовых координат. В этом так называемом пространстве главных напряжений поверхность текучести Кулона имеет форму пирамиды с вершиной в точке V ($c \operatorname{ctg} \varphi, c \operatorname{ctg} \varphi, c \operatorname{ctg} \varphi$), сечение пирамиды плоскостью $\sigma_2 = 0$ имеет форму неправильного шестиугольника $ABCDEF$, показанного на рис. 3 (см. Шилд [1] и Кокс и др. [1]). В пространстве главных напряжений историю нагружения рассматриваемой материальной точки можно представить линией, причем ни один из ее участков не выходит за пределы поверхности текучести. Если изображающая точка лежит внутри поверхности текучести, то все ближайшие изменения напряженного состояния будут упругими. Если же, с другой стороны, эта точка лежит на поверхности текучести, то изменения напряженного состояния будут упругими только в том случае, если путь напряжения уходит внутрь от поверхности текучести, в другом случае изменения будут пластическими. Пусть для определенности $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_2 = \sigma_\theta, \sigma_3 = \sigma_\varphi$. Тогда, поскольку здесь $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, из формы поверхности текучести следует, что пластическое течение

имеет место только для напряженных состояний, представленных точками на линиях, проходящих через V и одну из точек $C(-b, 0, 0)$ или $F(a, 0, 0)$, где

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2c} &= \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \varphi \right), \\ \frac{b}{2c} &= \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Закон течения Кулона (т. е. уравнения для скоростей пластических деформаций) требует, чтобы вектор с компонентами $\dot{\epsilon}_r^p$, $\dot{\epsilon}_\theta^p$, $\dot{\epsilon}_\varphi^p$ был направлен по внешней нормали к поверхности текучести в рассматриваемой точке. Обозначим функцию текучести через $f(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi)$, причем знак функции f выбираем таким образом, чтобы $f < 0$ для напряженных состояний ниже текучести и $f = 0$ для напряженных состояний в условиях текучести. Тогда закон течения имеет вид

$$\dot{\epsilon}_r^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta}, \quad \dot{\epsilon}_\varphi^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\varphi}, \quad (5.5)$$

где $\dot{\lambda}(r, t) \geq 0$ — скалярная функция. Нужно заметить, что условие $\dot{\lambda} \geq 0$ является следствием более фундаментального условия $\dot{W}^p \geq 0$, где $\dot{W}^p$ — скорость пластической работы на единицу объема. В сингулярных точках функцию f в уравнениях (5.5) нужно интерпретировать надлежащим образом (т. е. согласно Койтеру [1] и Прагеру [1]). Так как $\dot{\epsilon}_\theta^p \equiv \dot{\epsilon}_\varphi^p$, то для каждой из пар пластических режимов (VBC , VCD) и (VEF , VFA) применяется своя комбинация механизмов пластического течения. Соответствующие функции текучести имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_{VBC} &= -\frac{\sigma_r}{b} + \frac{\sigma_\varphi}{a} - 1, & f_{VCD} &= -\frac{\sigma_r}{b} + \frac{\sigma_\theta}{a} - 1, \\ f_{VEF} &= \frac{\sigma_r}{a} - \frac{\sigma_\varphi}{b} - 1, & f_{VFA} &= \frac{\sigma_r}{a} - \frac{\sigma_\theta}{b} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Тогда из уравнений (5.5), имея в виду ограничение $\dot{\epsilon}_\theta^p \equiv \dot{\epsilon}_\varphi^p$, можно получить искомый закон течения в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r^p &= -\frac{\dot{\lambda}}{b}, \quad \dot{\epsilon}_0^p = \dot{\epsilon}_\varphi^p = \frac{\dot{\lambda}}{2a} && \text{для пластического} \\ &&& \text{режима } VC \\ \dot{\epsilon}_r^p &= \frac{\dot{\lambda}}{a}, \quad \dot{\epsilon}_0^p = \dot{\epsilon}_\varphi^p = -\frac{\dot{\lambda}}{2b} && \text{для пластического} \\ &&& \text{режима } VF \end{aligned} \right\} (\dot{\lambda} \geq 0). \quad (5.7)$$

Условия текучести и законы течения для обоих пластических режимов можно записать в более простой единой форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r^p &= -\frac{\dot{\lambda}(\tilde{\omega} - \sin \varphi)}{2c \cos \varphi}, \quad \dot{\epsilon}_\theta^p = \dot{\epsilon}_\varphi^p = \frac{\dot{\lambda}(\tilde{\omega} + \sin \varphi)}{4c \cos \varphi}, \\ \sigma_\theta &= \frac{(\tilde{\omega} - \sin \varphi) \sigma_r + 2c \cos \varphi}{\tilde{\omega} + \sin \varphi}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta, \end{aligned} \right\} (\dot{\lambda} \geq 0), \quad (5.8)$$

где $\tilde{\omega}$ равно $+1$ или -1 для пластических режимов VC или VF соответственно. Так как

$$\tilde{\omega} = \text{sign}(-\dot{\epsilon}_r^p) = \text{sgn}(\dot{\epsilon}_\theta^p),$$

то можно ожидать, что пластические режимы VC и VF относятся соответственно к фазам расширения и сжатия.

Таким образом, соотношения для скоростей изменения напряжений, скоростей деформаций и условие текучести имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial v}{\partial r} &= \dot{\sigma}_r - 2\nu \dot{\sigma}_\theta - E \dot{\lambda} \frac{\tilde{\omega} - \sin \varphi}{2c \cos \varphi}, \\ E \frac{v}{r} &= (1 - \nu) \dot{\sigma}_\theta - \nu \dot{\sigma}_r + E \dot{\lambda} \frac{\tilde{\omega} + \sin \varphi}{4c \cos \varphi}, \\ f &= \tilde{\omega} \sigma_\theta - \frac{(\tilde{\omega} - \sin \varphi) \sigma_r + 2c \cos \varphi}{1 + \tilde{\omega} \sin \varphi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где $\dot{\lambda} \begin{cases} = 0, & \text{если } f > 0, \text{ или } f = 0 \text{ и } \dot{f} > 0, \\ \geq 0, & \text{если } f = \dot{f} = 0. \end{cases}$

Уравнения (5.9) описывают не только нагружение, но и разгрузку, которая включает либо чисто упругое поведение, либо обратное пластическое течение.

Полная система основных уравнений состоит из уравнений (5.9) совместно с уравнениями движения и сохранения массы. Последние два уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (5.10)$$

$$\dot{\rho} + \frac{\tilde{\rho} \partial}{r^2 \partial r} (r^2 v) = 0, \quad (5.11)$$

где ρ — плотность. Если смещение материальной точки с текущими радиусом r и временем t будет u , то $v = \dot{u}$, и отсюда

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} / \left(1 - \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (5.12)$$

Из первых двух уравнений (5.9) и (5.11) следует, что

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{p}}{k} - \frac{\dot{\lambda} \operatorname{tg} \varphi}{c}, \quad (5.13)$$

где $p = -1/3(\sigma_r + 2\sigma_\theta)$, а $k = E/\{3(1-2\nu)\}$ есть упругий объемный модуль. Так как до возникновения текучести $\dot{\lambda} = 0$, уравнение (5.13) можно проинтегрировать, тогда получится

$$\rho = \frac{\rho_0 \exp(p - \Pi)}{k} - \frac{\dot{\lambda} \operatorname{tg} \varphi}{c}, \quad (5.14)$$

где ρ_0 — начальная плотность, а Π — начальное значение p [см. уравнение (5.27)]. Таким образом, поскольку $\lambda > 0$, пластическая деформация всегда приводит к уменьшению плотности, если только $\varphi \neq 0$. Этот результат физически неприемлем в условиях продолжающегося пластического течения (см. Дженике и Шилд [1] и п. 5.7).

Теперь рассмотрим материальный элемент объема $d\tau$. Скорость изменения работы, совершаемой в этом элементе, превосходит скорость возрастания кинетической энергии на величину $W d\tau$, где величина

$$W = \sigma_r \dot{\epsilon}_r + 2\sigma_\theta \dot{\epsilon}_\theta \quad (5.15)$$

есть вклад в скорость возрастания внутренней энергии единицы объема элемента (см., например, Джеффрис [1], стр. 75). В теории пластичности металлов принято интерпретировать $\dot{W}$ как сумму скорости изменения энергии упругого деформирования $\dot{W}^e$ и скорости изменения энергии пластического деформирования $\dot{W}^p = \dot{W} - \dot{W}^e$. В этой теории принимается также предположение, что W^e есть обратимая составляющая скорости увеличения внутренней энергии, а W^p — необратимая, причем последняя ассоциируется с изменениями теплосодержания, а также расположения и движения атомов (см. Хилл [2]). Справедливость этой процедуры, которая также неявно применяется в теории пластичности грунтов, из термодинамических принципов еще не установлена.

Итак,

$$\left. \begin{aligned} \dot{W} &= \dot{W}^e + \dot{W}^p, \\ \text{где, согласно уравнениям (5.2), первым двум} \\ \text{уравнениям (5.8) и третьему уравнению (5.9),} \\ \dot{W}^e &= \sigma_r \dot{\epsilon}_r^e + 2\sigma_0 \dot{\epsilon}_0^e = \frac{1}{2E} \frac{D}{Dt} \{ \sigma_r^2 - 4\nu\sigma_r\sigma_0 + 2(1-\nu)\sigma_0^2 \}, \\ \dot{W}^p &= \sigma_r \dot{\epsilon}_r^p + 2\sigma_0 \dot{\epsilon}_0^p = \dot{\lambda} \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

причем $\dot{W}^e$ и $\dot{W}^p$ (совпадающее здесь с $\dot{\lambda}$) — обратимая упругая и необратимая пластическая части (избыточной) скорости изменения работы $\dot{W}$.

Параметр $\dot{\lambda}$ можно полностью исключить из этих уравнений. Во-первых, для чисто упругих деформаций $\dot{\lambda} = 0$. Во-вторых, для пластических деформаций [см. два первых уравнения (5.9)] $\dot{\lambda}$ можно исключить из соотношений для скоростей изменения напряжения и скоростей деформаций, тогда получится

$$\begin{aligned} &\{1 - 2\nu + \tilde{\omega}(1 + 2\nu) \sin \varphi\} \dot{\sigma}_r + 2\{1 - 2\nu - \tilde{\omega} \sin \varphi\} \dot{\sigma}_0 = \\ &= E \left\{ (1 + \tilde{\omega} \sin \varphi) \frac{\partial v}{\partial r} + 2(1 - \tilde{\omega} \sin \varphi) \frac{v}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Второе необходимое уравнение следует из условия продолжающегося течения, которое [см. третье уравнение

(5.9)] требует, чтобы

$$\dot{\sigma}_\theta = (1 - \tilde{\omega} \sin \varphi) \dot{\sigma}_r / (1 + \tilde{\omega} \sin \varphi). \quad (5.18)$$

Тогда из двух первых уравнений (5.9) и (5.18) следует

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = 4\tilde{\omega} c \cos \varphi \left[\{1 - 2\nu + \tilde{\omega}(1 + 2\nu) \sin \varphi\} \frac{v}{r} - \right. \\ \left. - \{1 - 2\nu - \tilde{\omega} \sin \varphi\} \frac{\partial v}{\partial r} \right] \times \\ \times \{(1 - 2\nu)(3 - 2\tilde{\omega} \sin \varphi) + (3 + 2\nu) \sin^2 \varphi\}^{-1}, \quad (5.19) \end{aligned}$$

так что $\dot{\lambda}$ выражается только через v , а условием неотрицательности скорости изменения пластической работы является условие

$$\begin{aligned} \{\tilde{\omega}(1 - 2\nu) + (1 + 2\nu) \sin \varphi\} \frac{v}{r} - \\ - \{\tilde{\omega}(1 - 2\nu) - \sin \varphi\} \frac{\partial v}{\partial t} \geq 0. \quad (5.20) \end{aligned}$$

Следует заметить, что в данном анализе сохраняются конвективные члены, которыми пренебрегают в классической теории малых упругих деформаций. Такой метод обладает преимуществом при устранении некоторых несогласованностей между уравнениями, описывающими упругие и пластические деформации. Более того, это позволяет учесть тот факт, что в идеальных грунтах возможны конечные деформации даже в упругой области (см. табл. 8 и 12). Способ описания больших упругих деформаций в идеальных грунтах рассматривается в п. 7.1.1 и 7.2.

5.3. Соотношения на разрывах

В анализе п. 5.2 молчаливо принимаются некоторые условия о непрерывности и дифференцируемости различных параметров процесса, таких, как напряжения и скорости. В действительности здесь предполагается, что могут существовать только *слабые* разрывы. На поверхности *сильных* разрывов выполняются конечные соотношения, которые, как можно считать, заменяют здесь некоторые из дифференциальных уравнений.

В данном исследовании любая возможная поверхность разрыва должна быть сферической и концентричной с камуфлетной поверхностью. Пусть через S обозначена такая сферическая поверхность, скажем $r=r_1(t)$, и пусть при переходе через поверхность S происходит разрыв по крайней мере одной величины, скажем $G(r, t)$. Этот разрыв следует рассматривать как предельное изменение некоторого непрерывного распределения $G(r, t)$ по толщине тонкой сферической оболочки, заключающей в себе S , при стягивании оболочки около S . Разрыв величины G при переходе через S определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} [G] &= G^+ - G^-, \\ \text{где} \\ G^\pm &= \lim_{r \rightarrow r_1 \pm 0} G(r, t). \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Положение поверхности S во времени будет, вообще говоря, изменяться, и это изменение можно представить кривой C , описываемой на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами r и t уравнением

$$g(r, t) \equiv r - r_1(t) = 0. \quad (5.22)$$

Следует заметить, что некоторые разрывы параметров процесса, строго говоря, не могут существовать в реальных средах. Некоторые особенности реального физического поведения, как, например, влияние упрочнения и скоростей деформаций, приводят к смягчению резких разрывов, которые переходят в узкие непрерывные переходные зоны. Общее рассмотрение соотношений на разрывах в механике твердых тел см. в работах Прагера [2], Хилла [3] и Томаса [1, гл. 2].

Развиваемые здесь рассуждения являются формальными, причем формулировки аналитических условий, достаточных для справедливости полученных результатов, не приводятся.

Прежде всего рассмотрим кинематические ограничения, накладываемые на допустимые разрывы производных от непрерывных переменных. Предположим, что значения G непрерывны при переходе через поверхность S в некотором интервале времени. Пусть P_1, P, P_2 — точки, взятые

по порядку на малом отрезке кривой C . Тогда $[G]_{P_1} = [G]_{P_2} = 0$, и, следовательно, $([G]_{P_1} - [G]_{P_2})/\delta s = [(G_{P_1} - G_{P_2})/\delta s] = 0$, где δs — длина отрезка P_1P_2 . Переходя к пределу при $\delta s \rightarrow 0$, получаем $[\partial G/\partial s]_p = 0$ или, согласно уравнению (5.22),

$$\left. \begin{aligned} V \left[\frac{\partial G}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial G}{\partial t} \right] &= 0, \\ \text{где} \quad V &= \frac{dr_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

— скорость распространения поверхности S . Согласно уравнению (5.23), имеются две возможности: 1) $V=0$, когда $[\partial G/\partial t]=0$, но $\partial G/\partial r$ может быть, а может и не быть непрерывной, и 2) $V \neq 0$, когда $[\partial G/\partial r]=0$ и $[\partial G/\partial t]=0$ или $[\partial G/\partial t] = -V[\partial G/\partial r] \neq 0$. Даже в идеальных средах должен выполняться ряд условий неразрывности переменных. Во-первых, при упруго-пластическом течении без разрушения выполняется условие

$$[u] = 0. \quad (5.24)$$

Во-вторых, из законов сохранения массы и импульса следует, что

$$[\rho(v - V)] = 0, \quad (5.25)$$

$$[\sigma_r - \rho v(v - V)] = 0. \quad (5.26)$$

5.4. Начальные и граничные условия

Предположим, что первоначально ($t=0$) область $r \geq a(0) = a_0$ находилась в покое под действием равномерного гидростатического давления Π и что в последующем ($t > 0$) на камуфлетную поверхность $r = a(t)$ действовало известное давление $P(a)$. Тогда начальные и граничные условия будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\Pi, \quad \rho = \rho_0 \\ \text{при } r \geq a_0, \quad t = 0, \\ \sigma_r = -P(a) \text{ при } r = a(t), \\ u, v \rightarrow 0, \quad \sigma_r, \sigma_\theta \rightarrow -\Pi, \quad \rho \rightarrow \rho_0 \text{ при } r \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} t = 0, \\ t > 0. \end{matrix} \quad (5.27)$$

Как отмечено в п. 2.4, величина Π выбирается как сумма атмосферного давления p_a и давления вышележащей толщи земли $\rho_0 g h$ на глубине центра заряда, т. е.

$$\Pi = p_a + \rho_0 g h. \quad (5.28)$$

5.5. Постановка математической задачи

Математическая задача состоит в определении величин ρ , u , v , σ_r , σ_θ как функций r и t , удовлетворяющих уравнениям поля и определяющим уравнениям (5.9)—(5.12), соотношениям на разрывах (5.24)—(5.26), начальным и граничным условиям (5.27) и предположению, что функция текучести непрерывна на упруго-пластической границе.

Предположим, что функции ρ , u , v , σ_r , σ_θ известны вплоть до некоторого момента времени t . Тогда требуется определить малые изменения $\delta\rho$, δu , δv , $\delta\sigma_r$, $\delta\sigma_\theta$, происходящие за время δt . Для случая локально упругих деформаций имеются кинематические соотношения (5.12), две конвективно-гукковы скорости изменения напряжения, выражения для скоростей деформаций (5.9) (два первых) при $\dot{\lambda}=0$, уравнение движения (5.10) и уравнение сохранения массы (5.11). В случае локально пластической деформации имеются, как и ранее, уравнения (5.10)—(5.12), кроме того, одна упруго-пластическая зависимость между скоростью изменения напряжений и скоростью деформаций (5.17) и условие текучести для скоростей изменения напряжений (5.18). Таким образом, в каждом случае имеется пять уравнений для пяти неизвестных. Поэтому в принципе задача является определенной, но следует заметить, что положение всех поверхностей разрыва априори неизвестно, поэтому они должны быть найдены из решения. Однако в условиях сферической симметрии при упрощениях, основанных на пренебрежении эффектами распространения волн (см. п. 5.6), определение природы поверхностей разрыва не представляет трудностей. Наконец, решение должно удовлетворять условиям $\dot{f} < 0$ или $\dot{f} = 0$ и $\dot{f} < 0$ в областях упругого деформирования и условиям $\dot{f} = \dot{f} = 0$ и $\dot{W}^p \geq 0$ в областях пластического деформирования.

5.6. Упрощенная методика

Мы имеем дело с задачей о нелинейном распространении упруго-пластических волн. Разумно предположить, что в силу сложности анализа, существенно включающего в себя интегрирование системы гиперболических дифференциальных уравнений, точное решение оказывается достижимым только при использовании чисто численных методов. Однако использование упрощенной методики, основанной на одном из двух нижеследующих предположений, позволяет избежать трудностей, связанных с эффектами распространения волн. Первое из них использовано в разд. 6, где предполагается, что пластическая область несжимаема, а упругая область сжимаема, но инерционными силами в последней пренебрегается. Второе использовано в разд. 7, где несжимаемым предполагается весь грунт в целом. Движение, определяемое любым из этих предположений, мы называем изохронным. Эти предположения открывают возможность проведения более глубокого аналитического исследования основных уравнений.

Тейлор и Пенни (1954, частное сообщение), анализ которых ограничивался фазой первичного расширения камуфлетного движения, предположили, что в пластической области материал является несжимаемым, а упругая область находится в равновесии. Эти предположения приводят к математическим противоречиям на упруго-пластической границе, обнаруженным Хикксом (1954, частное сообщение). В настоящей работе, согласно раннему способу, предложенному Хиллом [1], эти противоречия, возникающие из-за нарушения на упруго-пластической границе условий (5.25), (5.26), исключаются путем введения предположения о несжимаемости среды всюду и учета инерционных эффектов в обеих областях — и в пластической, и в упругой. Форма основных уравнений для полностью несжимаемого движения получена в следующем пункте, но проведение подробного анализа и представление числовых результатов отложено до разд. 7.

5.7. Уравнение для несжимаемого течения

Предполагая, что движение полностью несжимаемо,

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad (5.29)$$

и используя уравнение сохранения массы (5.11), получаем, что $\partial(r^2 v)/\partial r = 0$. Скорость частицы, следовательно, определяется выражением

$$v = \frac{a^2 \dot{a}}{r^2}, \quad (5.30)$$

где $\dot{a}$ — скорость камуфлетной поверхности.

Тогда скорости деформации выражаются в виде

$$\dot{\epsilon}_r = -\frac{2a^2 \dot{a}}{r^3}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{a^2 \dot{a}}{r^3}, \quad (5.31)$$

а уравнение движения (5.10) принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r^2} - \frac{2a^4 \dot{a}^2}{r^5} \right\}. \quad (5.32)$$

Так как предположение (5.29) введено и для упругой и для пластической деформаций, необходимо прежде всего положить $v = 1/2$, а затем для достижения согласованности с уравнением (5.14) положить $\varphi = 0$ в законе течения Кулона (5.8) (два первых уравнения). Таким образом, соотношения для скоростей изменения напряжений, скоростей деформаций и условие текучести должны быть взяты в форме

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial v}{\partial r} &= \dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta - E \frac{\tilde{\omega} \dot{\lambda}}{2c}, \\ E \frac{v}{r} &= \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_\theta - \dot{\sigma}_r) + E \frac{\tilde{\omega} \dot{\lambda}}{4c}, \\ f - \tilde{\omega} \sigma_0 - \frac{(\tilde{\omega} - \sin \varphi) \sigma_r + 2c \cos \varphi}{1 + \tilde{\omega} \sin \varphi} &= 0, \\ \dot{W}'' &\begin{cases} = 0, & \text{если } f < 0 \text{ или } f = 0 \text{ и } \dot{f} < 0, \\ \geq 0, & \text{если } f = \dot{f} = 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Соотношение между фундаментальным условием $\dot{W}'' \geq 0$ и полученным условием $\dot{\lambda} = 0$ будет рассмотрено ниже [см. замечания, следующие за уравнениями (5.36)].

Чедвик [1] показал, что влияние упругой сжимаемости мало, когда камуфлетная полость расширяется квазистати-

чески, но для динамического расширения подобного исследования нет. Использование неассоциированного закона течения является отклонением от современных методов теории пластичности. Для металлов имеются некоторые серьезные основания применять ассоциированные законы течения, но не так обстоит дело с грунтами. При больших пластических деформациях, когда λ велико, уравнение (5.14) приводит к существенному уменьшению плотности ρ , если угол φ отличен от нуля. Этот результат физически неприемлем, поскольку грунты проявляют только ограниченную дилатансию, и соответствующие изменения плотности относительно малы. Поэтому в условиях больших деформаций физически более реалистичен модифицированный закон течения. Однако при $v=1/2$ скорость продольной упругой волны бесконечно велика, и необходимо оценить погрешность, вносимую этим предположением.

Для удобства ниже приводятся некоторые из уравнений (5.2) в форме, следующей из условия несжимаемости.

Уравнение (5.15) при этом сохраняется, но величины $\dot{W}^e$ и $\dot{W}^p$ теперь определяются выражениями

$$\dot{W}^e = \frac{1}{2E} \frac{D}{Dt} \{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2\}, \quad \dot{W}^p = \frac{\tilde{\omega}\dot{\lambda}}{2c} (\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (5.34)$$

Теперь уже невозможно и не необходимо исключать $\dot{\lambda}$ из выражений для скоростей изменения напряжений и скоростей деформаций, как это сделано при выводе уравнений (5.17), так как первые два уравнения (5.33) являются зависимыми и служат только для определения $\dot{\lambda}$. Нужно заметить, что из условия текучести [третье уравнение (5.33)] следует, что

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2\tilde{\omega}(c \cos \varphi - \sigma_r \sin \varphi)}{1 + \tilde{\omega} \sin \varphi}. \quad (5.35)$$

Таким образом,

$$\dot{W}^p = \frac{\dot{\lambda}(\cos \varphi - \sin \varphi \sigma_r/c)}{1 + \tilde{\omega} \sin \varphi}, \quad (5.36)$$

и, следовательно, $\dot{W}^p \geq 0$ означает, что $\dot{\lambda} \geq 0$, если только $\sigma_r < c \operatorname{ctg} \varphi$. Однако это ограничение уже принималось в связи с анализом поверхности текучести, определенной

уравнениями (4.5), что устанавливает эквивалентность обоих названных условий.

Требование, чтобы скорость изменения пластической работы была неотрицательна, теперь выражено только через величины v , но при использовании уравнений (5.30), второго уравнения (5.33) и (5.35) его можно записать в виде

$$\frac{2a^2\dot{a}}{r^3}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{1}{2E} \frac{D}{Dt} \{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2\} \geq 0, \quad (5.37)$$

Уравнения (5.24)–(5.26) означают, что

$$[u] = 0, \quad [v] = 0, \quad [\sigma_r] = 0, \quad (5.38)$$

и так как функция текучести предполагается непрерывной при переходе через упруго-пластическую границу, то

$$[\sigma_\theta] = 0. \quad (5.39)$$

Наконец, начальные и граничные условия (5.27) остаются неизменными.

III. МОДЕЛИ КАМУФЛЕТНОГО ДВИЖЕНИЯ

6. Модели точечного источника

Развитая в разд. 5 теория сферического упруго-пластического течения идеального грунта в этом разделе применяется к модели типа точечного источника камуфлетного движения. Для такой модели заданная выделившаяся энергия $\mathcal{E}_{\text{кам}}$ концентрируется в одной точке. Сравнение между численными результатами, полученными для модели точечного источника и модели сферического заряда для взрыва, выполнено в п. 7.1.7.

Анализ будет проводиться в соответствии с предположениями, приводящими к изохронному движению. В п. 6.1 пластическая область предполагается несжимаемой, а в упругой области пренебрегается инерционными силами, как это и предлагалось Тейлором и Пенни (1954, частное сообщение) в их теории подобия для фазы первичного расширения. Модификация теории Пенни–Тейлора, предложенная Хикксом (1954, частное сообщение), рассматривается в п. 6.2. Эта теория учитывает инерционные эффекты в упругой области, которая при этом считается несжимаемой.

В данном разделе рассматривается только фаза первичного расширения. Однако предварительные соображения используются для анализа последующих пульсаций, строгое рассмотрение которых откладывается до п. 7.1.2 и 7.1.3.

6.1. Теория подобия Пенни—Тейлора

Теория образования сферически симметричной камуфлетной полости, принадлежащая Тейлору и Пенни, приводится здесь в оригинальном изложении, кроме некоторых приложений и поправок, относящихся к закону изменения давления продуктов взрыва и характеру распределения энергии. Анализ образования камуфлетной полости, выполненный Тейлором для квазистатической деформации, был распространен Пенни на динамическое деформирование. Характерной чертой теории является использование геометрического подобия, так что, в частности, радиус упруго-пластической границы равен постоянной, умноженной на радиус расширяющейся камуфлетной поверхности. Следует заметить, однако, что условие геометрического подобия, которое определяет структуру теории и не является следствием анализа размерностей, перестает выполняться в конце фазы первичного расширения. Эта модель дает полезную аппроксимацию более сложного решения, полученного в разд. 7, когда происходит достаточно большое расширение, хотя в силу предположения о развитии камуфлетной полости, начиная с нулевого радиуса, задача возникновения пластического течения остается неопределенной.

Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — соответственно радиусы камуфлетной поверхности и упруго-пластической границы (см. рис. 1). Тогда область $a \leq r < b$ деформируется пластически, на границе $r = b$ реализуется условие текучести, а область $r > b$ деформируется упруго.

6.1.1. Фаза первичного расширения

Согласно третьему уравнению (5.9) при условии расширения $\tilde{\omega} = 1$, условие текучести можно записать в виде

$$(1 + \alpha) \sigma_\theta - \sigma_r - Y = 0, \quad (6.1)$$

где

$$Y = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \alpha = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (6.2)$$

соответственно означают *сопротивление течению и коэффициент трения грунта*. Уравнение (6.1) было использовано Тейлором и Пенни, но они не выводили уравнений (6.2), показывающих зависимость Y и α от параметров грунта c и φ .

В упругой области инерционными эффектами пренебрегают, но учитывают эффекты сжимаемости. Пусть в начальном состоянии деформация считается равной нулю. Тогда, используя закон Гука для связи изменений напряжений и деформаций, имеем

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial r} &= \sigma_r + \Pi - 2\nu(\sigma_\theta + \Pi), \\ E \frac{u}{r} &= (1 - \nu)(\sigma_0 + \Pi) - \nu(\sigma_r + \Pi), \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Следует заметить, что модель точечного источника, принадлежащая Тейлору и Пенни, излагается здесь, как уже указывалось выше, существенно в первоначальном виде. По этой причине закон Гука применяется в его обычной форме, связывающей напряжения и деформации, а не в конвективной форме (5.2). Поскольку этот закон используется только в упругой области, где, согласно теории подобия Пенни—Тейлора, имеют место только малые деформации, существенной ошибки тем самым не вносится.

Граничным условиям (5.27) соответствует следующее решение уравнений (6.3):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\Pi - 4\mu \frac{C}{r^3}, \\ \sigma_\theta &= -\Pi + 2\mu \frac{C}{r^3}, \\ u &= \frac{C}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (r > b), \quad (6.4)$$

где C — определяемая ниже функция времени. Хотя здесь материал и не предполагается несжимаемым, форма этого решения свидетельствует о том, что в упругой области не происходит изменения плотности [см. уравнение (5.14)]. Так как в пластической области материал предполагается несжимаемым и $a_0 = 0$, условие сохранения массы приводит к соотношению $r^3 - r_0^3 = a^3$, где r_0 — начальный радиус материальной точки, находящейся в текущий момент времени на расстоянии радиуса r . В частности, если $r = b$ и $r_0 = b - (u)_{r=b}$, то

$$(u)_{r=b} \approx \frac{a^3}{3b^2}, \quad (6.5)$$

где смещение $(u)_{r=b}$ предполагается малым. Из третьего уравнения (6.4) и уравнения (6.5) тогда получаем

$$C = \frac{1}{3} a^3. \quad (6.6)$$

Так как материал на упруго-пластической границе находится в состоянии текучести, уравнение (6.1), два первых уравнения (6.4) и (6.6) дают

$$\frac{b^3}{a^3} = \frac{2\mu(3 + \alpha)}{3(Y + \alpha\Pi)} = \text{const} = n^3, \quad (6.7)$$

где в практических условиях n имеет порядок 10. Таким образом, радиус упруго-пластической границы равен произведению постоянной n на радиус камуфлетной поверхности. Кроме того, так как

$$-(\sigma_r)_{r=b+0} = \frac{2Y + 3(1 + \alpha)\Pi}{3 + \alpha}, \quad (6.8)$$

радиальные (и касательные) напряжения на упруго-пластической границе постоянны.

В пластической области выполняется уравнение (5.32), а при использовании условия (6.1) следует, что σ_r будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)r} \sigma_r = \frac{2Y}{(1 + \alpha)r} + \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r^2} - \frac{2a^4 \dot{a}^2}{r^5} \right\}. \quad (6.9)$$

Отсюда

$$\sigma_r = \frac{Y}{\alpha} - \rho_0 (1 + \alpha) \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{(1 - \alpha) r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{(2 + \alpha) r^4} \right\} + F(t) r^{-2\alpha/(1 + \alpha)}, \quad (6.10)$$

где $F(t)$ — произвольная функция. Так как плотность постоянна, из уравнений (5.25) и (5.26) следует, что напряжения σ_r непрерывны при $r=b$. Отсюда при помощи уравнения (6.8) можно определить функцию $F(t)$; тогда

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{Y}{\alpha} - \rho_0 (1 + \alpha) \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{(1 - \alpha) r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{(2 + \alpha) r^4} \right\} - \\ & - \left\{ \frac{na}{r} \right\}^{2\alpha/(1 + \alpha)} \left[\frac{3(1 + \alpha)(Y + \alpha\Pi)}{\alpha(3 + \alpha)} - \right. \\ & \left. - \rho_0 (1 + \alpha) \left\{ \frac{a \ddot{a} + 2\dot{a}^2}{(1 - \alpha)n} - \frac{\dot{a}^2}{(2 + \alpha)n^4} \right\} \right] \quad (a \leq r < b). \quad (6.11) \end{aligned}$$

Частные случаи $\alpha=0$ и $\alpha=1$, соответствующие условиям $\varphi=0$ (среда без внутреннего трения) и $\varphi \approx 19,5^\circ$, рассматриваются как предельные формы уравнения (6.11) при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 1$. Соответствующие результаты здесь не приводятся, но можно заметить, что при этом появляются логарифмические члены. Из уравнения (6.11) сразу следует соотношение между камуфлетным давлением $P(a)$ и радиусом a камуфлетной полости

$$\begin{aligned} P = & n^{2\alpha/(1 + \alpha)} \left[\frac{3(1 + \alpha)(Y + \alpha\Pi)}{\alpha(3 + \alpha)} - \rho_0 (1 + \alpha) \left\{ \frac{a \ddot{a} + 2\dot{a}^2}{(1 - \alpha)n} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\dot{a}^2}{(2 + \alpha)n^4} \right\} \right] + \rho_0 (1 + \alpha) \left\{ \frac{a \ddot{a} + 2\dot{a}^2}{1 - \alpha} - \frac{\dot{a}^2}{2 + \alpha} \right\} - \frac{Y}{\alpha}. \quad (6.12) \end{aligned}$$

Это уравнение мы назовем *камуфлетным уравнением Пенни*.

Если $P(a)$ известно, то уравнение (6.12) является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

второго порядка относительно $a(t)$, которое должно быть проинтегрировано для соответствующих начальных условий. Подстановка этого решения в другие уравнения завершает анализ. Численное интегрирование камуфлетного уравнения Пенни рассматривается в п. 6.1.3, а иллюстративные числовые результаты приведены в п. 6.1.4

6.1.2. Фаза первичного сжатия и последующие пульсации

Так как в общем случае в конце фазы первичного расширения $\dot{a} \neq 0$, то будет происходить дальнейшее движение. Для выявления точной картины этого движения, в частности изменения радиуса камуфлетной поверхности в ходе фазы первичного расширения, необходим детальный анализ. Целесообразно заранее изложить некоторые результаты, полученные в п. 7.1. Дальнейшее движение камуфлетной поверхности зависит от типа идеального грунта, а также от значения начального равномерного гидростатического давления Π . В общем случае оказывается, что в идеальном грунте, проявляющем любое заметное внутреннее трение, дальнейшие изменения радиуса камуфлетной поверхности малы. В идеальных грунтах, лишенных трения, амплитуда движения в фазе первичного сжатия резко возрастает с ростом величины Π . В итоге пластическая деформация прекращается, и всякое дальнейшее движение при этом будет состоять из упругих пульсаций.

Фаза первичного сжатия включает в себя предварительное упругое движение, за которым обычно следует дальнейшее упруго-пластическое движение. Условие текучести, определяемое теперь третьим уравнением (5.9) при $\dot{\omega} = -1$, имеет вид

$$(1 + \alpha) \sigma_r - \sigma_\theta - Y = 0, \quad (6.13)$$

где параметры грунта Y и α определяются уравнениями (6.2). В силу упругого характера разгрузки повторение соображений п. 6.1.1 с заменой уравнения (6.1) уравнением (6.13) не позволяет более связывать свойства движений в фазах первичного расширения и первичного сжатия, а потому неизбежен полный упруго-пластический анализ фазы

первичного сжатия. Однако в некоторых случаях при помощи энергетических рассуждений можно показать, что следующие за фазой первичного расширения движения камуфлетной поверхности малы. Рассмотрим распределение энергии в конце фазы первичного расширения. Общая кинетическая энергия равна нулю. В пластической области пластическую работу и энергию упругого деформирования можно определить из уравнений (5.16), причем когда материал становится пластическим, необходимо заменить истинное значение параметра ν величиной $1/2$. Остальная часть работы, совершенной продуктами взрыва при расширении камуфлетной полости, обратимо аккумулируется в упругой области в виде энергии упругого деформирования, и в результате работы, производимой против равномерного гидростатического давления, — в виде потенциальной энергии на бесконечности. Пусть радиусы камуфлетной поверхности и упруго-пластической границы в конце фазы первичного расширения (при $t=t_1$) равны a_1 и b_1 . Тогда в силу уравнения (5.30), первого уравнения (6.4) и (6.6) и (6.7) полная работа, производимая в финальной упругой области силами, приложенными к финальной упруго-пластической границе, равна

$$\begin{aligned} 4\pi b_1^2 \int_0^{t_1} (-\sigma_r \nu)_{r=b_1} dt &= 4\pi b_1^2 \int_0^{a_1} \left(\Pi + \frac{4\mu a^3}{3b_1^3} \right) \frac{a^2}{b_1^2} da = \\ &= \frac{4}{3} \pi a_1^3 \left\{ \Pi + \frac{Y + \alpha \Pi}{3 + \alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Полная работа, производимая в этой же области напряжениями, приложенными на бесконечности, в силу уравнения (5.30), первого уравнения (6.4) и (6.6) равна

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ 4\pi R^2 \int_0^{t_1} (\sigma_r \nu)_{r=R} dt \right\} &= \\ = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ 4\pi R^2 \int_0^{a_1} \left(-\Pi - \frac{4\mu a^3}{3R^3} \right) \frac{a^2}{R^2} da \right\} &= -\frac{4}{3} \pi a_1^3 \Pi. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Тогда из уравнений (6.14) и (6.15) полная энергия деформации, накопленная в упругой области, равна

$$\frac{4}{3} \pi a_1^3 \frac{Y + \alpha \Pi}{3 + \alpha}, \quad (6.16)$$

а потенциальная энергия

$$\frac{4}{3} \pi a_1^3 \Pi \quad (6.17)$$

оказывается аккумулированной на бесконечности. Работа, производимая камуфлетным давлением, равна

$$4\pi \int_0^{a_1} a^2 P(a) da = \frac{4}{3} \pi a_1^3 P_m, \quad (6.18)$$

где

$$P_m = \frac{1}{V_1} \int_0^{V_1} P(V) dV$$

— среднее значение P , рассматриваемое в течение фазы первичного расширения как функция камуфлетного объема V . Тогда, если

$$P_m \gg \Pi + \frac{Y + \alpha \Pi}{3 + \alpha}, \quad (6.19)$$

то в предположении, что энергии упругих деформаций в пластической и упругой областях являются величинами одинакового порядка, сумма обратимой энергии деформирования и потенциальной энергии на бесконечности будет намного меньше, чем работа, производимая камуфлетным давлением. Следовательно, эта работа должна быть только незначительно больше работы необратимых пластических деформаций. В этом случае энергия, затрачиваемая на сжатие газообразных продуктов взрыва, мала, так что должна быть малой и амплитуда всякого дальнейшего движения. Однако оказывается, что в большинстве практических случаев сильное неравенство (6.19) не выполняется, а потому приведенные выше соображения становятся, вообще говоря, несостоятельными.

6.1.3. Методика расчетов

Камуфлетное уравнение Пенни можно записать в форме

$$\begin{aligned} & \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \rho_0 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \{1 - n^{-(1-\alpha)/(1+\alpha)}\} - \\ & - \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \rho_0 \dot{a}^2 \{1 - n^{-2(2+\alpha)/(1+\alpha)}\} + \\ & + \left(\Pi + \frac{Y}{\alpha} \right) \left\{ 3 \frac{1+\alpha}{3+\alpha} n^{2\alpha/(1+\alpha)} - 1 \right\} + \Pi - P = 0. \quad (6.20) \end{aligned}$$

Уравнение (6.20) удобно привести к безразмерной форме. Пусть скорость c_0 определяется выражением

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho_0}; \quad (6.21)$$

введем безразмерные время τ и расстояние x :

$$\tau = \frac{c_0 t}{a_0}, \quad x = \frac{a}{a_0}, \quad (6.22)$$

где a_0 — произвольная определяемая ниже длина. Тогда уравнение (6.20) сводится к следующему:

$$K_1 x x'' + 2(K_1 - K_2) x'^2 + K_3 - \Theta(x) = 0, \quad (6.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \{1 - n^{-(1-\alpha)/(1+\alpha)}\}, \\ K_2 &= \frac{1+\alpha}{2(2+\alpha)} \{1 - n^{-2(2+\alpha)/(1+\alpha)}\}, \\ K_3 &= \frac{1}{E} \left(\Pi + \frac{Y}{\alpha} \right) \left\{ 3 \frac{1+\alpha}{3+\alpha} n^{2\alpha/(1+\alpha)} - 1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

— постоянные,

$$\Theta(x) = \frac{P(a) - \Pi}{E}, \quad (6.25)$$

а штрих означает дифференцирование по τ .

В начальный момент $t=0$ и $a=0$, т. е. $\tau=0$ и $x=0$. Если $xx''=0$ при $\tau=0$, то из уравнения (6.23) следует, что

$$x' = \left\{ \frac{\Theta_0 - K_3}{2(K_1 - K_2)} \right\}^{1/2} \text{ при } \tau=0, \quad (6.26)$$

где $\Theta_0 = \Theta(0)$. Можно показать, что $K_1 - K_2 > 0$, если $n > 1$. Таким образом, начальное значение x' будет действительным, если

$$P_0 \geq \Pi + \left(\Pi + \frac{Y}{\alpha} \right) \left\{ 3 \frac{1+\alpha}{3+\alpha} n^{2\alpha/(1+\alpha)} - 1 \right\}, \quad (6.27)$$

и это минимальное значение P_0 , как видно из уравнения (6.20), равно давлению, необходимому для квазистатического расширения камуфлетной полости.

Поскольку $\Theta(x)$ известно, уравнение (6.23) можно проинтегрировать при известных начальных условиях, что дает возможность определить x как функцию τ . Анализ характера камуфлетного давления, проведенный в п. 4.1, должен быть теперь распространен на случай, когда выделившаяся энергия $\mathcal{E}_{\text{кам}}$ сосредоточена в одной точке [что делает длину a_0 в уравнении (4.1) неопределенной]. Вероятный способ преодоления этой трудности состоит в выборе величины a_0 в уравнениях (4.1) и (6.22), равной радиусу сферического заряда, у которого эффективная выделившаяся энергия $\mathcal{E}_{\text{кам}}$ равна выделившейся энергии при точечном источнике, а также в предположении, что уравнение (4.1) справедливо в области $a \geq 0$. Однако, поступая так, нельзя получить решения уравнения (6.23), поскольку из-за поведения функции $\Theta(x)$ вблизи $x=0$ некоторые интегралы становятся расходящимися. Этот способ поэтому не представляет ценности. Из широкого круга математически приемлемых предположений, которые могут быть сделаны, можно выбрать два. Обозначим их через *A* и *B*. Числовые результаты, приводимые ниже, показывают, что основные черты камуфлетного движения не изменяются резко в зависимости от точности принятых предположений.

Предположение A состоит в том, что камуфлетное давление равно постоянной P_1 для $a \leq a_0$, где a_0 — радиус сферического заряда с эффективной выделившейся энергией

$\mathcal{E}_{\text{кам}}$. Предполагается, что закон изменения $P(a)$ при $a > a_0$ определяется уравнением (4.1) при замене P_0 величиной P_1 . Таким образом,

$$P(a) = \left\{ \begin{array}{ll} P_1 & \text{при } 0 \leq \frac{a}{a_0} \leq 1, \\ P_1 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-9} & \text{при } 1 \leq \frac{a}{a_0} \leq 1,530, \\ P_1 (1,530)^{-5,19} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3,81} & \text{при } \frac{a}{a_0} \geq 1,530. \end{array} \right\} \quad (6.28)$$

Приравнивая количество выделившейся энергии величине, определенной в п. 4.1, имеем

$$P_1 = 1,991 \cdot 10^5 \text{ фунт/дюйм}^2. \quad (6.29)$$

Рост камуфлетной полости до радиуса a_0 (т. е. в области $0 \leq x \leq 1$) описывается уравнением

$$K_1 x x'' + 2(K_1 - K_2) x'^2 + K_3 - \Theta_0 = 0, \quad (6.30)$$

где $\Theta_0 = (P_1 - \Pi)/E$ — постоянная. Это уравнение можно переписать в форме

$$\frac{d}{dx} \{ x^{4(1-K_2/K_1)} x'^2 \} = \frac{2}{K_1} (\Theta_0 - K_3) x^{3-4K_2/K_1}.$$

Интегрирование этого уравнения при начальном условии (6.26) приводит к выражению

$$x' = \left\{ \frac{\Theta_0 - K_3}{2(K_1 - K_2)} \right\}^{1/2}. \quad (6.31)$$

Таким образом, камуфлетная полость расширяется с постоянной скоростью. Поскольку $x=0$ при $\tau=0$, полное решение уравнения (6.30) имеет вид

$$x = \left\{ \frac{\Theta_0 - K_3}{2(K_1 - K_2)} \right\}^{1/2} \tau. \quad (6.32)$$

Согласно уравнению (6.32), время, затрачиваемое на расширение камуфлетной полости до радиуса a_0 ($x=1$), равно

$$t_0 = \frac{a_0}{c_0} \left\{ \frac{2(K_1 - K_2)}{\Theta_0 - K_3} \right\}^{1/2}. \quad (6.33)$$

Если момент t_0 выбрать в качестве нового начала отсчета времени, новые начальные условия для интегрирования уравнения (6.23) имеют вид

$$x=1, \quad x'=\left\{\frac{\Theta_0-K_3}{2(K_1-K_2)}\right\}^{1/2} \quad \text{при } \tau=0. \quad (6.34)$$

Рост камуфлетной полости свыше радиуса a_0 описывается уравнениями (6.23) и (6.34), причем камуфлетное давление определяется уравнениями (6.28) и (6.29).

Предположение В состоит в том, что $a=a_0$ и $\dot{a}=0$ при $t=0$ и что $P(a)$ задается уравнениями (4.1)–(4.3), где a_0 — радиус сферического заряда с эффективной выделившейся энергией $\mathcal{E}_{\text{кам}}$. Хотя это предположение нельзя согласовать с анализом, положенным в основу уравнения (6.12), оно не содержит внутренних математических противоречий и благодаря заметному отличию от предположения А позволяет сделать вывод, что решение уравнения (6.12) не сильно зависит от точной формы закона изменения давления газа $P(a)$.

Очевидно, что предположения А и В различаются только величинами начальных скоростей камуфлетной поверхности и константами пропорциональности в зависимости между камуфлетным давлением и радиусом полости; метод численного интегрирования уравнения (6.12) в обоих случаях остается одним и тем же.

Оказывается удобным заменить уравнение (6.23) системой дифференциальных уравнений первого порядка. Для этой цели введем переменные

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \tau = \frac{c_0 t}{a_0}, \\ x_1 &= x = \frac{a}{a_0}, \\ x_2 &= x' = \frac{\dot{a}}{c_0}, \\ x_3 &= \frac{P(a) - \Pi}{E} = \Theta(x), \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{d\tau} &= 1, \\ \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{x_3 - K_3 - 2(K_1 - K_2)x_2^2}{K_1 x_1}, \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= x_2 \Theta'(x_1). \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Соответствующие начальные условия тогда выражаются в виде

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \left\{ \frac{\Theta_0 - K_3}{2(K_1 - K_2)} \right\}^{1/2}, x_3 = \frac{P_1 - \Pi}{E} \quad \text{для предположения } A, \quad (6.37)$$

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = \frac{P_0 - \Pi}{E} \quad \text{для предположения } B. \quad (6.38)$$

Несмотря на простоту систем уравнений (6.36), (6.37) и (6.38), они иллюстрируют способ, принятый всюду в данной статье для интегрирования уравнений камуфлетного движения, причем используется метод Рунге—Кутты для системы уравнений четвертого порядка по Гиллу [1]. Числовые результаты приведены в п. 6.1.4.

Можно заметить, что в случае идеальных грунтов, лишенных внутреннего трения ($\alpha=0$), уравнения (6.24) принимают вид

$$K_1 = 1 - n^{-1}, K_2 = \frac{1}{4}(1 - n^{-4}), K_3 = \frac{4}{9}(1 + 3 \ln n) n^{-3}. \quad (6.39)$$

Камуфлетное уравнение Пенни можно записать в общем виде так:

$$P = A + B a \ddot{a} + C \dot{a}^2, \quad (6.40)$$

где $A = EK_3 + \Pi$, $B = \rho_0 K_1$ и $C = 2\rho_0 (K_1 - K_2)$. Интегрирующий множитель уравнения (6.40) равен $\dot{a} a^{(2C/B)-1}$;

если $a = \dot{a} = 0$ при $t = 0$ принимается в качестве начального условия, то

$$\int_0^a P(a) a^{(2C/B)-1} da = \frac{1}{2} B a^{2C/B} \left(\frac{A}{C} + \dot{a}^2 \right). \quad (6.41)$$

Таким образом определена функция $\dot{a}$; вторая квадратура позволяет найти a . Полагая в уравнении (6.41) $a = 0$ ($a \neq 0$) для камуфлетного радиуса a_1 в конце фазы первичного расширения, получаем в неявном виде выражение

$$\int_0^{a_1} P(a) a^{(2C/B)-1} da = \frac{AB}{2C} a_1^{2C/B}. \quad (6.42)$$

Важно отметить случай, когда $3B = 2C$ (т. е. $K_1 = 4K_2$). Тогда с точностью до множителя 4π левая часть уравнения (6.42) оказывается равной работе, производимой камуфлетным давлением в ходе фазы первичного расширения, и если W_{ex} есть работа, производимая камуфлетным давлением при расширении камуфлетной полости до радиуса a , то уравнения (6.41) и (6.42) упрощаются:

$$\frac{1}{4\pi} W_{ex}(a) = a^3 \left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{2} B \dot{a}^2 \right), \quad (6.43)$$

$$\frac{1}{4\pi} W_{ex}(a_1) = \frac{1}{3} A a_1^3. \quad (6.44)$$

Теперь, если $P(a_1) \approx p_a$, то $W_{ex}(a_1) \approx \mathcal{E}_{\text{кам}}$, и уравнение (6.44) можно приближенно представить в виде

$$a_1 = \left(\frac{3\mathcal{E}_{\text{кам}}}{4\pi A} \right)^{1/3}. \quad (6.45)$$

Однако продолжительность фазы первичного расширения зависит как от $\mathcal{E}_{\text{кам}}$, так и от скорости, с которой производилась работа камуфлетного давления, однако соответствующей приближенной формулы получить не удастся.

В случае произвольного грунта условие $K_1 = 4K_2$ будет, вообще говоря, выполняться только при одной определенной глубине заложения заряда. Однако гораздо инте-

реснее то обстоятельство, что это условие приближенно удовлетворяется для грунтов, лишенных внутреннего трения, на всех глубинах при условии, что n велико [см. уравнения (6.39)]. В этом случае уравнение (6.45) можно записать в явной форме

$$a_1 = \left[\frac{3}{4\pi} \mathcal{E}_{\text{кам}} / \left\{ \Pi + \frac{2}{3} Y \left(1 + \ln \frac{2E}{3Y} \right) \right\} \right]^4. \quad (6.46)$$

Результаты, аналогичные уравнению (6.46), получены Хиллом [1] при рассмотрении образования камуфлетной полости в грунтах и Хантером [1] при рассмотрении образования каверн в металлах.

6.1.4. Числовые результаты

Как указывалось выше, камуфлетное уравнение (6.23) интегрировалось для двух различных систем начальных условий. Следовательно, по программе вычислений САМ 1 А предполагалось, что при $t=0$ выполняются условия (6.37) и $P(a)$ задается уравнениями (6.28) и (6.29), а по программе САМ 1 В предполагалось, что при $t=0$ выполняются условия (6.38) и $P(a)$ определяется уравнениями (4.1)–(4.3).

В табл. 4 даны числовые значения для трех идеальных грунтов S , P и Z (см. п. 4.2.3) при глубине заложения заряда 100 *фут.* Значения ν для этих идеальных грунтов в п. 4.2.3 не приводились; для простоты здесь предполагается, что во всех случаях $\nu = 1/2$, так что $\mu = E/3$. Видно, что задаваемые для двух программ числовые значения параметров хорошо согласуются. Помимо этих крупномасштабных характеристик движения, в программах предусматривалось вычисление x как функции от τ . Эти результаты представлены в виде графиков на рис. 5, где для сравнения представлены также результаты теории, излагаемой в п. 7.1. Подробный анализ числовых результатов отложен до п. 7.1.7.

Следует заметить, что в силу явно непротиворечивых и относительно простых особенностей пластической зоны, предсказываемых рассматриваемой моделью образования камуфлетной полости, в данной работе не проводилось прямой численной проверки условия неотрицательности

Таблица 4

Числовые значения по модели точечного источника

Глубина заложения заряда 100 фут

- $\tau_1 = c_0 t_1 / a_0$ — безразмерное время конца фазы первичного расширения;
 a_1 / a_0 — безразмерный радиус камуфлетной поверхности в конце фазы первичного расширения;
 n — постоянное отношение радиусов упруго-пластической границы и камуфлетной поверхности;
 A, B — результаты подсчетов, выполненных при предположениях A и B (в первом случае τ_1 включает время начального расширения при постоянном давлении).

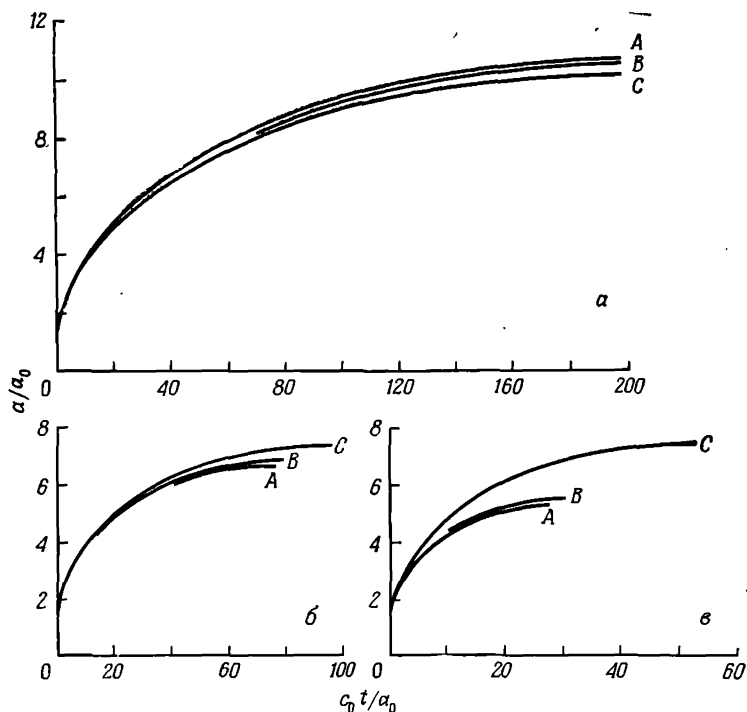
Грунт	Предположение	τ_1	a_1/a_0	n
<i>S</i>	<i>A</i>	199,5	10,55	13,57
	<i>B</i>	198,7	10,42	13,57
<i>P</i>	<i>A</i>	76,64	6,773	9,187
	<i>B</i>	79,27	6,919	9,187
<i>Z</i>	<i>A</i>	28,66	5,422	5,092
	<i>B</i>	29,90	5,590	5,092

скорости пластической работы. Известно, что в близких задачах это условие удовлетворяется, и из-за утомительности проверки предполагалась его справедливость и в рассматриваемом случае.

Числовые величины в табл. 4 представлены в безразмерном виде. Для получения данных при задании выделившейся энергии $\mathcal{E}$ необходимо прежде всего определить радиус a_0 эквивалентного сферического заряда. Затем для определения размерных значений параметров все безразмерные длины и времена умножаются соответственно на a и a_0/c_0 . Однако следует сделать важную оговорку. Все представленные результаты основаны на предположительном законе изменения $\Theta(x)$, который должен быть одним и тем же для всех значений a_0 . Это означает, что давление P должно считаться постоянным, а отсюда вытекает неизменность глубины заложения h . Таким образом, семейство результатов, соответствующих диапазону значений a_0 , относится к зарядам различных размеров, но детонирующих на одинаковой глубине. Следовательно, хотя данная безразмерная формулировка задачи и кажется подтверждающей закон геометрического подобия Гопкинсона, на

самом деле это не имеет места, поскольку не сохраняется полное геометрическое подобие.

Кроме того, отсюда следует, что в реальных случаях a_0 не может бесконечно возрастать, так как упруго-пластическая граница не должна распространяться до поверхности



Р и с. 5. Изменение камуфлетного радиуса во времени в фазе первичного расширения для взрывов на глубине 100 фута в грунтах: *S* — рис. *a*, *P* — рис. *б*, *Z* — рис. *в*.

A — модель точечного источника, предположение *A*; *B* — модель точечного источника, предположение *B*; *C* — модель сферического заряда.

земли, если выполняется предполагаемое условие о сферической симметрии (см. п. 2.4). При увеличении a_0 величина b возрастает, но глубина h остается постоянной. Это означает существование максимального значения a_0 , при превышении которого теория не может применяться. Табл. 5 содержит некоторые численные оценки этого ограничения,

Таблица 5

Ограничения массы заряда

Глубина заложения заряда 100 фут

Грунт	Максимальная масса, фунт
S	$1,4 \cdot 10^2$
P	$1,6 \cdot 10^3$
Z	$1,8 \cdot 10^4$

выраженные через массу заряда. Эти значения соответствуют массе заряда, при которой радиус упруго-пластической границы в конце фазы первичного расширения строго равен глубине заложения заряда h , т. е. 100 фут. Этот вопрос дополнительно рассматривается в п. 7.1.7, причем там получены более общие результаты (см. табл. 11).

6.2. Другие теории

Отличительной чертой теории взрывов в грунтах Пенни—Тейлора является геометрическое подобие. Это — прямое следствие пренебрежения инерционными членами в упругой области вне зависимости от того, предполагается ли при этом также несжимаемость. Хиккс (1954, частное сообщение) модифицировал теорию Пенни — Тейлора, учтя инерционные члены. Тогда, для того чтобы исключить эффекты, связанные с распространением волн, необходимо предположить грунт всюду несжимаемым. Для определения радиусов $a(t)$ и $b(t)$ получается система двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти камуфлетные уравнения содержат члены, включающие произведения коэффициента трения грунта на инерционные напряжения, что приводит к монотонному возрастанию отношения b/a при расширении камуфлетной полости. За исключением случая сред, лишенных внутреннего трения, камуфлетное уравнение Хиккса по сложности близко к уравнениям, полученным в п. 7.1.1 для модели взрыва сферического заряда, а свойства подобия, характерные для модели Пенни—Тейлора, оказываются утраченными. Поэтому теория, излагаемая в

разд. 7 и не ограничиваемая моделями точечного источника, предпочтительнее теории Хиккса, хотя последняя и имеет полезные приложения в более простом случае сред, лишенных внутреннего трения.

7. Модели сферического заряда

В этом разделе общая теория сферического упруго-пластического течения в идеальных грунтах, развитая в разд. 5 и специализированная для случая несжимаемого течения в п. 5.7, применяется к модели камуфлетного движения при сферическом заряде. Исследование ограничивается случаем несжимаемой среды при полном учете инерционных эффектов. Другие теории обсуждаются в п. 7.3.

7.1. Теория несжимаемого течения

Пусть t_i ($i=1, 2, \dots$) — продолжительности последовательных фаз расширения и сжатия. Положим $t_i = t_{i,e} + t_{i,p}$, где $t_{i,e}$ и $t_{i,p}$ — продолжительности упругой и упруго-пластической частей i -й фазы соответственно.

7.1.1. Фаза первичного расширения

В фазе первичного расширения механическое состояние будет упругим в течение времени $t_{1,e}$ и упруго-пластическим в последующее время $t_{1,p}$. Обычно считают, что $t_{1,e} \ll t_{1,p}$.

а) *Упругие деформации.* Сначала движение состоит только из упругих деформаций грунта, окружающего камуфлетную поверхность. Деформация описывается уравнением движения (5.32) и конвективно-гукowymi соотношениями (5.33) (два первых), в которых $\dot{\lambda}$ принимается равной нулю. Преобразуем для удобства эти уравнения следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r^2} - \frac{2a^4 \dot{a}^2}{r^5} \right\}. \quad (7.1)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2Ea^2 \dot{a}}{r^3}. \quad (7.2)$$

Введем величину

$$\Sigma = \sigma_\theta - \sigma_r - 2E \ln \frac{r}{a_0}. \quad (7.3)$$

Тогда в силу $\dot{r} = a^2 \dot{a} / r^2$ уравнение (7.2) дает

$$\dot{\Sigma} = 0! \quad (7.4)$$

Таким образом, в ходе упругого деформирования Σ постоянна в любой материальной точке. Теперь из физических соображений следует, что $\sigma_r = \sigma_\theta$ при $t=0$, а координата материальной точки с текущим радиусом r есть $r-u$. Таким образом, сначала имеем $\Sigma = -2E \ln \{(r-u)/a_0\}$, и отсюда

$$\sigma_\theta - \sigma_r = -2E \ln \left(1 - \frac{u}{r}\right) \quad (\geq 0)! \quad (7.5)$$

В силу условия несжимаемости получаем

$$r^3 - a^3 = (r-u)^3 - a_0^3, \quad (7.5)$$

и уравнение (7.5) принимает вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2E}{3} \ln \left\{1 - \frac{a^3 - a_0^3}{r^3}\right\}. \quad (7.7)$$

Исключение σ_θ из уравнений (7.1) и (7.7) приводит к следующему дифференциальному уравнению для σ_r :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{4E}{3r} \ln \left\{1 - \frac{a^3 - a_0^3}{r^3}\right\} = \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r^2} - \frac{2a^4 \dot{a}^2}{r^5} \right\}. \quad (7.8)$$

Введем дилогарифм

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x \ln(1-\xi) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (7.9)$$

Определение (7.9) было предложено Левином [1, стр. 1], который подробно рассмотрел свойства этой функции. Из многочисленных функциональных соотношений, которым удовлетворяет дилогарифм, на этом этапе нужно отметить

результат Ландена

$$\text{Li}_2 \left\{ \frac{x}{x-1} \right\} + \text{Li}_2 \{x\} = -\frac{1}{2} \ln^2(1-x), \quad x < 1 \quad (7.10)$$

(см. Левин [1, стр. 5]), который будет использован здесь в ходе дальнейшего анализа.

Решение уравнения (7.8), удовлетворяющее граничному условию для напряжений на бесконечности [уравнение (5.27)], можно выразить в форме

$$\sigma_r = -\Pi - \frac{4E}{9} \text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right\} - \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\}. \quad (7.11)$$

Наконец, в силу граничного условия для напряжений на камуфлетной поверхности [уравнение (5.27)] функция a удовлетворяет уравнению

$$P(a) = \Pi + \frac{4E}{9} \text{Li}_2 \left\{ 1 - \frac{a_0^3}{a^3} \right\} + \rho_0 \left(a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right). \quad (7.12)$$

Три члена в правой части уравнения (7.12) соответствуют равномерному гидростатическому давлению, упругим напряжениям и инерционным напряжениям соответственно. Заметим, что при $E=0$ уравнение (7.12) можно применить к движению подводного пузыря. Интегрирование уравнения (7.12) дает

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^a P(a) a^2 da &= \frac{1}{3} \Pi (a^3 - a_0^3) + \frac{1}{2} \rho_0 a^3 \dot{a}^2 + \\ &+ \frac{4E}{27} \left[a^3 \text{Li}_2 \left\{ 1 - \frac{a_0^3}{a^3} \right\} + a_0^3 \text{Li}_2 \left\{ 1 - \frac{a^3}{a_0^3} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Левая часть уравнения (7.13) с точностью до множителя 4π представляет собой работу, производимую камуфлетным давлением, а члены справа определяют соответственно потенциальную энергию, накопленную на бесконечности, кинетическую энергию и энергию упругой деформации грунта. Чтобы определить $a(t)$, уравнение (7.13) нужно

проинтегрировать численно. Распределения напряжений и скоростей можно после этого найти, пользуясь предыдущими уравнениями.

Приведенный выше анализ применим до тех пор, пока впервые не будет достигнуто условие текучести. Тогда, согласно уравнению (7.5), имеем $\sigma_\theta - \sigma_r \geq 0$, откуда соответствующее условие текучести получается из третьего соотношения (5.9) при $\bar{\omega} = 1$ и имеет вид

$$(1 + \alpha) \sigma_\theta - \sigma_r - Y = 0, \quad (7.14)$$

где

$$Y = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \alpha = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (7.15)$$

Пластическое течение возникает впервые на камуфлетной поверхности, когда, по определению, $t = t_{1,e}$ и $a = a_{1,e}$. Из уравнений (7.7) и (7.14), если положить $r = a$ и $\sigma_r = -P(a)$, следует, что $a_{1,e}$ определяется формулой

$$2E(1 + \alpha) \ln \frac{a_{1,e}}{a_0} = Y + \alpha P(a_{1,e}). \quad (7.16)$$

В общем случае $Y/E \ll 1$, поэтому в простом и более изученном случае среды, лишенной внутреннего трения ($\alpha = 0$), величина $a_{1,e}/a_0 - 1$ мала. Однако, вообще говоря, это не обязательно, поскольку $P(a_{1,e}) \gg Y$, и даже при весьма малых значениях α деформации не могут более считаться малыми. Иллюстративные числовые значения приведены в табл. 8; дальнейшее рассмотрение этого вопроса будет проведено в п. 7.2.

б) *Упруго-пластическая деформация.* Когда радиус камуфлетной полости превышает $a_{1,e}$, пластическая область распространяется во внешнюю от камуфлетной поверхности зону. Теперь становится необходим отдельный анализ упругой и упруго-пластической областей с надлежащим согласованием результатов на упруго-пластической границе. Будем обозначать радиус упруго-пластической границы в момент времени t ($\geq t_{1,e}$) через $b(t)$, так что области $a(t) \leq r < b(t)$ и $r > b(t)$ будут пластической и упругой соответственно, а на границе $r = b(t)$ будет реализоваться условие текучести (см. рис. 1).

1) *Упругая область* ($r > b$). В упругой области по-прежнему выполняются уравнения (7.1)–(7.8) и (7.11), так что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r &= -\frac{2E}{3} \ln \left\{ 1 - \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right\}, \\ \sigma_r &= -\Pi - \frac{4E}{9} \text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right\} - \\ &\quad - \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\}, \end{aligned} \right\} , \quad r > b(t). \quad (7.17)$$

2) *Пластическая область* ($a \leq r < b$). В пластической области выполняется условие текучести (7.14), поэтому

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{\alpha \sigma_r - Y}{1 + \alpha}, \quad a(t) \leq r < b(t). \quad (7.18)$$

После подстановки (7.18) в уравнение движения (7.1) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)r} \sigma_r = \frac{2Y}{(1 + \alpha)r} + \\ + \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r^2} - \frac{2a^4 \dot{a}^2}{r^5} \right\}, \quad a(t) \leq r < b(t). \quad (7.19)$$

Интегрируя (7.19) с учетом условия на камуфлетной поверхности [уравнение (5.27)], приходим к соотношению

$$\sigma_r = \frac{Y}{\alpha} - \left\{ P(a) + \frac{Y}{\alpha} \right\} \left\{ \frac{a}{r} \right\}^{2\alpha/(1 + \alpha)} + \\ + \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \rho_0 (a \ddot{a} + 2\dot{a}^2) \left[\left\{ \frac{a}{r} \right\}^{2\alpha/(1 + \alpha)} - \frac{a}{r} \right] - \\ - \frac{1 + \alpha}{2 + \alpha} \rho_0 \dot{a}^2 \left[\left\{ \frac{a}{r} \right\}^{2\alpha/(1 + \alpha)} - \left\{ \frac{a}{r} \right\}^4 \right], \quad a(t) \leq r < b(t). \quad (7.20)$$

Здесь и далее данные для частных случаев $\alpha = 0$ ($\varphi = 0$) и $\alpha = 1$ ($\varphi \approx 19,5^\circ$) получаются путем предельного перехода.

Эти результаты здесь не приводятся, но можно заметить, что они содержат логарифмические члены.

Решение должно быть дополнено путем согласования результатов на упруго-пластической границе. Напряжения σ_r и σ_θ должны быть непрерывны при $r = b(t)$ [см. третье уравнение (5.38) и (5.39)], а отсюда можно показать, что $a(t)$ и $b(t)$ будут удовлетворять системе двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \{Y + \alpha P(a)\} \left\{ \frac{a}{b} \right\}^{2\alpha/(1+\alpha)} + \frac{2E}{3} (1+\alpha) \ln \left\{ 1 - \frac{a^3 - a_0^3}{b^3} \right\} - \\ - \alpha \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \rho_0 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \left[\left\{ \frac{a}{b} \right\}^{2\alpha/(1+\alpha)} - \frac{a}{b} \right] + \\ + \alpha \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \rho_0 \dot{a}^2 \left[\left\{ \frac{a}{b} \right\}^{2\alpha/(1+\alpha)} - \left\{ \frac{a}{b} \right\}^4 \right] = 0, \quad (7.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y + \alpha \Pi + \frac{2E}{3} \left[(1+\alpha) \ln \left\{ 1 - \frac{a^3 - a_0^3}{b^3} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha}{3} \text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{b^3} \right\} \right] + \alpha \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \dot{a} + 2a\dot{a}^2}{b} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2b^4} \right\} = 0. \quad (7.22) \end{aligned}$$

Начальные условия для интегрирования уравнений (7.21) и (7.22) имеют вид

$$a = a_{1,e}, \quad \dot{a} = \dot{a}_{1,e}, \quad b = a = a_{1,e} \quad \text{при } t = t_{1,e}. \quad (7.23)$$

Фаза первичного расширения заканчивается в момент времени $t = t_1$, определяемый условием

$$\dot{a}(t_1) = 0. \quad (7.24)$$

7.1.2. Фаза первичного сжатия

Из-за предположенной несжимаемости среды в момент времени $t = t_1$ движение будет всюду менять направление. Последующее движение первоначально характеризуется упругой разгрузкой в упругой и пластической областях, существующих к концу фазы первичного расши-

рения. Таким образом, в последующем интервале времени $t_{2,e}$ весь грунт подвергается упругой деформации. Это упругое движение обычно заканчивается возникновением пластического течения, а затем новая пластическая область распространяется во внешнюю от камуфлетной поверхности зону. Деформация при этом становится упруго-пластической. Фаза первичного сжатия заканчивается, когда камуфлетная поверхность приходит вторично в состояние покоя. Таким образом, имеются две возможности для фазы первичного сжатия: либо она представлена исключительно упругими деформациями, либо не только ими. В первом случае все деформации после окончания фазы первичного расширения, вероятно, упругие, и тогда единый для всей фазы анализ формально завершает решение. Во втором случае требуется отдельное рассмотрение каждого из этапов движения фазы первичного сжатия и, кроме того, нужно дальнейшее исследование движения после конца этой фазы. Это более общий случай, перейдем к его рассмотрению.

а) *Упругая деформация.* Первоначально движение состоит только из упругой деформации, и это положение сохраняется в течение времени $t_{2,e}$. Движение описывается уравнениями (7.1)–(7.4), но их применение усложняется наличием в конце фазы первичного расширения области пластической деформации.

Пусть координата произвольной материальной точки в конце фазы первичного расширения ($t=t_1$) есть r_1 , а в текущий момент $t(>t_1)$ она равна $r(<r_1)$. Тогда в силу условия несжимаемости $r_1^3 - a_1^3 = r^3 - a^3$.

После завершения фазы первичного сжатия граница, разделяющая пластически и упруго деформированный материал, будет *подвижной*. Обозначим ее радиус в момент времени $t(>t_1)$ через $X(a)$, где a по-прежнему означает камуфлетный радиус. Тогда в силу условия несжимаемости $X^3(a) - a^3 = b_1^3 - a_1^3$. В последующем движении области $a \leq r < X(a)$ и $r > X(a)$ должны изучаться раздельно. Здесь сохраняет силу предыдущий вывод о том, что величина Σ , определяемая уравнением (7.3), постоянна в любой материальной точке, но ее значение теперь необходимо определяется условиями, существовавшими в момент времени t_1 .

Таким путем можно показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r = & -\frac{2E}{3} \ln \left\{ 1 + \frac{a_1^3 - a^3}{r^3} \right\} + \\ & + \frac{Y + \alpha P(a_1)}{1 + \alpha} \left\{ 1 + \frac{r^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/(3(1+\alpha))} - \\ & - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \left[\left\{ 1 + \frac{r^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/(3(1+\alpha))} - \right. \\ & \left. - \left\{ 1 + \frac{r^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-1/3} \right], \quad a \leq r < X(a), \\ \sigma_\theta - \sigma_r = & -\frac{2E}{3} \ln \left\{ \frac{r_1^3 - a_1^3 + a_0^3}{r^3} \right\} = \\ = & -\frac{2E}{3} \ln \left\{ 1 - \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right\}, \quad r > X(a), \end{aligned} \quad (7.25)$$

причем второе уравнение (7.25) и (7.7) совпадают, поскольку упругие деформации обратимы. Уравнение движения (7.1) выполняется в обеих областях, и его интегрирование при использовании уравнений (7.25) и граничных условий для напряжений на камуфлетной поверхности и на бесконечности [уравнения (5.27)] дает

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -P(a) + \frac{4E}{9} \left[\text{Li}_2 \left\{ 1 - \frac{a_1^3}{a^3} \right\} - \text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_1^3}{r^3} \right\} \right] + \\ & + \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \int_a^r \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-1/3} \frac{dx}{x} + \\ & + 2 \left\{ \frac{Y + \alpha P(a_1)}{1 + \alpha} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \right\} \times \\ & \times \int_a^r \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/(3(1+\alpha))} \frac{dx}{x} + \\ & + \rho_0 \left[a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 - \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\} \right], \quad (7.26) \\ & a \leq r < X(a), \end{aligned}$$

$$\sigma_r = -\Pi - \frac{4E}{9} \operatorname{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right\} - \\ - \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \dot{a} + 2a \dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\}, \quad r > X(a). \quad (7.26)$$

На границе $r = X(a)$ функции σ_r и σ_θ должны быть непрерывны. Преобразование уравнения (7.24) при $t = t_1$ в силу уравнения (7.25) показывает, что функция $\sigma_r - \sigma_\theta$ непрерывна. Из непрерывности σ_r в силу уравнений (7.26) следует, что $a(t)$ удовлетворяет уравнению

$$P(a) - \Pi - \rho_0 \left(a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = \frac{2\alpha}{1-\alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \times \\ \times \int_a^{X(a)} \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-1/3} \frac{dx}{x} + 2 \left\{ \frac{Y + \alpha P(a)}{1 + \alpha} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \right\} \int_a^{X(a)} \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/(3(1+\alpha))} \frac{dx}{x} + \\ + \frac{4E}{9} \left[\operatorname{Li}_2 \left\{ 1 - \frac{a_1^3}{a^3} \right\} - \operatorname{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_1^3}{X^3(a)} \right\} + \right. \\ \left. + \operatorname{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{X^3(a)} \right\} \right], \quad (7.27)$$

которое должно быть проинтегрировано при начальных условиях

$$a = a_1, \quad \dot{a} = \dot{a}_1 = 0 \quad \text{при } t = t_1. \quad (7.28)$$

Приведенный выше анализ справедлив до момента времени, пока снова не будет выполнено условие текучести.

Нужно ожидать, что $\sigma_\theta - \sigma_r < 0$, а потому в силу третьего уравнения (5.9) соответствующее условие текучести, по-

лучаемое при $\bar{\omega} = -1$, будет иметь вид

$$(1 + \alpha) \sigma_r - \sigma_\theta - Y = 0, \quad (7.29)$$

где Y и α определены выражениями (7.15). Пластическое течение возникнет прежде всего на камуфлетной поверхности при $t = t_1 + t_{2,e}$ и $a = a_{2,e}$. Тогда, полагая в первом уравнении (7.25) и (7.29) $r = a$ и $\sigma_r = -P(a)$, получаем для $a_{2,e}$ соотношение

$$2E(1 + \alpha) \ln \frac{a_1}{a_{2,e}} - \alpha P(a_1) - \alpha(1 + \alpha) P(a_{2,e}) - (2 + \alpha) Y = 0. \quad (7.30)$$

б) *Упруго-пластическая деформация.* Когда радиус камуфлетной поверхности станет меньше $a_{2,e}$, новая пластическая зона будет распространяться во внешнюю область от камуфлетной поверхности, которая ранее уже подвергалась пластическому деформированию.

Здесь необходимо раздельное исследование упругих и пластических областей, причем нужно учитывать пластическую деформацию, возникшую ранее в части грунта. Обозначим радиус новой упруго-пластической границы в момент времени $t \geq t_1 + t_{2,e}$ через $d(t)$, так что области $a(t) \leq r < d(t)$ и $r > d(t)$ в текущий момент времени подвергаются соответственно пластическому и упругому деформированию, а граница $r = d(t)$ находится в состоянии текущей.

Рассматриваются три области: 1) область $a \leq r < d$, которая подвергается в текущий момент и подвергалась ранее пластическому деформированию; 2) область $d < r < X(a)$, которая подвергается текущему упругому деформированию, но ранее подвергалась пластическому деформированию; 3) область $r > X(a)$, которая упруго деформируется все время. Соответствующий анализ будет справедлив до тех пор, пока вторая область полностью не будет поглощена первой, когда будет выполнено равенство $d = X$, но в последующем доказательстве предполагается, что этот этап, вероятно, не будет достигнут.

Распределение напряжений во всех трех областях можно получить из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= Y - \alpha \sigma_r, \\ \sigma_r &= \frac{Y}{\alpha} - \left\{ P(a) + \frac{Y}{a} \right\} \left\{ \frac{a}{r} \right\}^{-2\alpha} + \\ &\quad + \rho_0 \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{1 + 2\alpha} \left[\left\{ \frac{a}{r} \right\}^{-2\alpha} - \frac{a}{r} \right] - \\ &\quad - \rho_0 \frac{\dot{a}^2}{2 + \alpha} \left[\left\{ \frac{a}{r} \right\}^{-2\alpha} - \left\{ \frac{a}{r} \right\}^4 \right], \quad a(t) \leq r < d(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{2E}{3} \ln \left\{ 1 + \frac{a_1^3 - a^3}{r^3} \right\} - \\ &\quad - \frac{Y + \alpha P(a_1)}{1 + \alpha} \left\{ 1 + \frac{r^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/\{3(1+\alpha)\}} + \\ &\quad + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \left[\left\{ 1 + \frac{r^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/\{3(1+\alpha)\}} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + \frac{r^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-1/3} \right], \\ \sigma_r &= G(t) + \frac{4E}{9} \left[\text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_1^3}{X^3(a)} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_1^3}{r^3} \right\} \right] + \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \times \\ &\quad \times \int_{X(a)}^r \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-1/3} \frac{dx}{x} + 2 \left\{ \frac{Y + \alpha P(a_1)}{1 + \alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \right\} \int_{X(a)}^r \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/\{3(1+\alpha)\}} \frac{dx}{x} - \\ &\quad - \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\}, \quad d(t) < r < X(a), \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{2E}{3} \ln \left\{ 1 - \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right\}, \\ \sigma_r &= -\Pi - \frac{4E}{9} \operatorname{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right\} - \\ &\quad - \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\}, \quad r > X(a), \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

где $G(t)$ — произвольная и определяемая ниже функция. Напряжения σ_r и σ_θ (или эквивалентно σ_r и $\sigma_r - \sigma_\theta$) должны быть непрерывны на границах $r=d(t)$ и $r=X(a)$. Как и выше, из уравнений (7.21) — (7.25) следует, что разность $\sigma_r - \sigma_\theta$ непрерывна при $r=X(a)$.

Другие три условия показывают, что $a(t)$, $d(t)$ и $G(t)$ должны быть определены как функции времени t из уравнений

$$G(t) = -\Pi - \frac{4E}{9} \operatorname{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{X^3(a)} \right\}, \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} &\{Y + \alpha P(a)\} \left\{ \frac{a}{d} \right\}^{-2\alpha} - \alpha \rho_0 \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{1 + 2\alpha} \times \\ &\times \left[\left\{ \frac{a}{d} \right\}^{-2\alpha} - \frac{a}{d} \right] + \alpha \rho_0 \frac{\dot{a}^2}{2 + \alpha} \left[\left\{ \frac{a}{d} \right\}^{-2\alpha} - \left\{ \frac{a}{d} \right\}^4 \right] = \\ &= \frac{2E}{3} \ln \left\{ 1 + \frac{a_1^3 - a^3}{d^3} \right\} - \\ &- \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \left\{ 1 + \frac{d^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-1/3} - \left\{ \frac{Y + \alpha P(a_1)}{1 + \alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \right\} \left\{ 1 + \frac{d^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha / \{3(1 + \alpha)\}}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Y}{\alpha} - \left\{ P(a) + \frac{Y}{\alpha} \right\} \left\{ \frac{a}{d} \right\}^{-2\alpha} + \\
& + \rho_0 \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{1 + 2\alpha} \left[\left\{ \frac{a}{d} \right\}^{-2\alpha} + \frac{2\alpha a}{d} \right] - \\
& - \rho_0 \frac{\dot{a}^2}{2 + \alpha} \left[\left\{ \frac{a}{d} \right\}^{-2\alpha} + \frac{\alpha a^4}{2d^4} \right] = \\
& = -\Pi + \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \int_{X(a)}^d \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-1/3} \frac{dx}{x} + \\
& + 2 \left\{ \frac{Y + \alpha P(a_1)}{1 + \alpha} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho_0 a_1 \ddot{a}_1 \right\} \times \\
& \times \int_{X(a)}^d \left\{ 1 + \frac{x^3 - a^3}{a_1^3} \right\}^{-2\alpha/(3(1 + \alpha))} \frac{dx}{x} + \\
& + \frac{4E}{9} \left[\text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_1^3}{X^3(a)} \right\} - \text{Li}_2 \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{X^3(a)} \right\} - \right. \\
& \left. - \text{Li}_2 \left\{ \frac{a_1^3 - a_0^3}{d^3} \right\} \right]; \quad (7.36)
\end{aligned}$$

Уравнения (7.35) и (7.36) должны быть проинтегрированы при начальных условиях

$$a = a_2, \quad \dot{a} = \dot{a}_2, \quad d = a_2, \quad \text{при } t = t_1 + t_2. \quad (7.37)$$

Проведенный выше анализ справедлив лишь при условии $d(t) < X(t)$, и, поскольку $\dot{d}(t) > 0$ и $\dot{X}(t) < 0$, это неравенство может нарушиться. Однако для случая грунтов, лишенных внутреннего трения, с помощью уравнений (7.21) и (7.35) можно доказать невозможность нарушения рассматриваемого неравенства. В грунтах, обладающих трением, в которых амплитуда возвратного движения уменьшается из-за внутреннего трения, это утверждение, вероятно, еще будет справедливо; во всяком случае, проведенный анализ справедлив для всех грунтов до завершения фазы первичного сжатия. Впредь это будет предполагаться, но нужно заметить, что в каждом случае, когда это предположение оказывается ложным, необходимо рассмат-

ривать только две области: зона $a \leq r < d$, которая подвергается пластическому деформированию, и зона $r > d$, в которой продолжает происходить упругое деформирование.

Фаза первичного сжатия завершается в момент времени $t = t_1 + t_2$, определяемый условием

$$\dot{a}(t_1 + t_2) = 0 \quad (7.38)$$

7.1.3. Последующие пульсации

Формальный анализ камуфлетного движения, следующего за фазой первичного сжатия, можно провести непосредственно. Однако, поскольку движение по-прежнему связано с возникновением пластических деформаций, каждая из этих следующих одна за другой фаз должна рассматриваться в отдельности. В конце концов, достигается состояние упругих колебаний.

7.1.4. Численные методы

Основной анализ камуфлетного движения в фазах первичного расширения и сжатия был проведен в п. 7.1.1—7.1.3. Обсудим теперь численное решение камуфлетных уравнений (7.12), (7.21), (7.22), (7.27) и (7.35), (7.36). По сравнению с анализом на основе моделей точечного источника эти уравнения являются более сложными, поскольку отношение b/a не остается постоянным. Вообще для нахождения функций $a(t)$ и $b(t)$ или $d(t)$ необходимо проинтегрировать систему двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Мы используем численный метод Рунге — Кутты по Гиллу [1], применимый к системе из любого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Как и в п. 6.1.3, соответствующие камуфлетные уравнения прежде всего приводятся к безразмерной форме путем введения безразмерного времени τ и расстояния x , определяемых выражениями

$$\tau = c_0 \frac{t}{a_0}, \quad x = \frac{a}{a_0}, \quad \text{где } c_0^2 = \frac{E}{\rho_0}. \quad (7.39)$$

Затем после введения удобных вспомогательных переменных эти уравнения записываются в виде системы диффе-

ренциальных уравнений первого порядка. Системы уравнений частного вида, выбранные для удобства вычислений, здесь не приводятся. Числовые результаты были получены, согласно двум вычислительным программам САМ 2 А и САМ 2 В, применявшимся соответственно к лишенным трения и обладающим трением грунтам. Обе программы предусматривали расчет распределения энергии, который будет рассмотрен ниже. Числовые результаты даны в п. 7.1.7 для трех типов грунтов S , P и Z .

7.1.5. Распределение энергии

Работа, производимая камуфлетным давлением, переходит в энергию упругого деформирования, кинетическую энергию и пластическую работу в грунте, а также в потенциальную энергию, аккумулированную на бесконечности.

Введем следующие обозначения:

U_1 — полный приток энергии (работа, производимая продуктами взрыва);

U_2 — потенциальная энергия, аккумулированная на бесконечности;

U_3 — полная энергия упругого деформирования грунта;

U_4 — полная пластическая работа, совершенная в грунте;

U_5 — полная кинетическая энергия грунта.

Поэтому

$$U_1 = U_2 + U_3 + U_4 + U_5, \quad (7.40)$$

где U_2 , U_3 и U_5 соответствуют обратимой, а U_4 — необратимой составляющим энергии.

На любом этапе полный приток энергии равен

$$U_1 = 4\pi \int_{a_0}^a P(a) a^2 da, \quad (7.41)$$

и при использовании уравнений (4.1) — (4.3) следует

$$U_1 = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi a_0^3 P_0 \left\{ 1 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-6} \right\} & \left(\frac{a}{a_0} \leq 1,530 \right), \\ \frac{4}{3} \pi a_0^3 P_0 \left\{ 0,7497 - 0,4073 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-0,81} \right\} & \left(\frac{a}{a_0} \geq 1,530 \right). \end{cases} \quad (7.42)$$

Потенциальная энергия, аккумулированная на бесконечности, равна

$$U_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^t 4\pi R^2 \left\{ \Pi + O\left(\frac{1}{R}\right) \right\} \frac{a^2 \dot{a}}{R^2} dt = \\ = \frac{4}{3} \pi (a^3 - a_0^3) \Pi, \quad (7.43)$$

а общая кинетическая энергия грунта в силу предположения о несжимаемости определяется выражением

$$U_5 = 2\pi\rho_0 \int_a^\infty v^2 r^2 dr = 2\pi\rho_0 a^4 \dot{a}^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = 2\pi\rho_0 a^3 \dot{a}^2. \quad (7.44)$$

Остающиеся члены U_3 и U_4 должны быть определены в отдельности для каждого последующего этапа камуфлетного движения. Удобно иметь числовые значения всех компонент в отдельности, тогда интеграл энергии (7.40) можно использовать для проверки вычислений. Однако для грунтов, обладающих внутренним трением, энергию U_4 нельзя выразить в замкнутой форме; тогда проще подсчитать значение U_3 и для получения U_4 использовать тождество

$$U_4 = U_1 - U_2 - U_3 - U_5. \quad (7.45)$$

Здесь не проводится полный анализ выражений для U_3 и U_4 , но будут сформулированы некоторые простые результаты.

Энергия упругого деформирования единичного объема грунта равна

$$\frac{(\sigma_\theta - \sigma_r)^2}{2E}, \quad (7.46)$$

поскольку среда несжимаема [см. первое уравнение (5.34)]. Отсюда для полной упругой энергии грунта справедливо выражение

$$U_3 = \frac{2\pi}{E} \int_a^\infty (\sigma_\theta - \sigma_r)^2 r^2 dr. \quad (7.47)$$

Его можно определить, используя формулы для напряжений. В частности, для упругой части фазы первичного расширения разность $\sigma_r - \sigma_\theta$ задается уравнением (7.7), и можно видеть, что

$$U_3 = \frac{16\pi}{27} E a_0^3 \left[\left(\frac{a^3}{a_0^3} - 1 \right) \text{Li}_2 \left\{ 1 - \frac{a_0^3}{a^3} \right\} - \frac{1}{2} \ln^2 \left\{ \frac{a^3}{a_0^3} \right\} \right]. \quad (7.48)$$

Грунты, лишенные трения. Дальнейшие простые результаты можно получить только для грунтов, лишенных внутреннего трения. Ограничимся рассмотрением этого случая. Условие текучести сводится к соотношению $|\sigma_\theta - \sigma_r| = Y$. Поэтому упругая энергия единичного объема для произвольной точки пластической области равна

$$\frac{Y^2}{2E}, \quad (7.49)$$

а полная упругая энергия пластической области в фазе первичного расширения равна

$$\frac{2\pi Y^2}{3E} (b^3 - a^3). \quad (7.50)$$

Полная упругая энергия упругой области дается выражением, аналогичным правой части уравнения (7.48). Полная пластическая работа, совершенная в единичном объеме грунта, равна

$$W^p = \int (\sigma_r d\epsilon_r^p + 2\sigma_\theta d\epsilon_\theta^p), \quad (7.51)$$

где интеграл берется вдоль пути пластического деформирования материальных точек. Далее, из второго уравнения (5.34) следует $\dot{W}^p = \tilde{\omega} \dot{\lambda} (\sigma_\theta - \sigma_r) / 2c$, где $\dot{\lambda}$ выражается через $\dot{\sigma}_r$, $\dot{\sigma}_\theta$ и v , согласно второму уравнению (5.33). В частности, поскольку здесь $\phi = 0$, можно показать, что во время фазы первичного расширения имеем

$$\dot{W}^p = \frac{2Y a^2 \dot{a}}{r^3} = 2Y \frac{D}{Dt} \left\{ \ln \left(\frac{r}{a_0} \right) \right\}. \quad (7.52)$$

Следовательно, полная пластическая работа, совершаемая в единичном объеме, равна

$$W^p = 2Y \ln \left(\frac{r}{r_*} \right) \quad (7.53)$$

для элемента среды с координатой r в текущий момент времени t , который впервые перешел в пластическое состояние в точке r_* (r) в момент t_* (r). Далее, если $a(t_*) = a_*$ и $b(t_*) = b_*$, то $r_* = b_*$ и из условия несжимаемости следует, что

$$r^3 - a^3 = b_*^3 - a_*^3. \quad (7.54)$$

Если положить в уравнении (7.22) $\alpha = 0$, то можно видеть, что отношение $(a^3 - a_0^3)/b^3$ постоянно во время фазы первичного расширения. Отсюда, в частности, получаем

$$\frac{a^3 - a_0^3}{b_*^3} = 1 - \frac{a_0^3}{a_{1,e}^3}. \quad (7.55)$$

Путем исключения a_* из уравнений (7.54) и (7.55) определяется величина $b_* \equiv r_*$, а потому уравнение (7.53) принимает вид

$$W^p = \frac{2Y}{3} \ln \left\{ \frac{a_0^3 r^3}{a_{1,e}^3 (r^3 - a^3 + a_0^3)} \right\}; \quad (7.56)$$

Наконец, полная пластическая работа, производимая в пластической области, равна

$$U_4 = \frac{8\pi}{9} Y \left[(a^3 - a_0^3) \ln \left\{ \frac{a^3 - a_0^3}{a_{1,e}^3 - a_0^3} \right\} + a^3 \ln \left\{ \frac{a_{1,e}^3}{a^3} \right\} \right]. \quad (7.57)$$

7.1.6. Влияние скоростей деформирования

В п. 4.2.3 обращалось внимание на тот факт, что прочность грунтов зависит от скорости деформирования. Проведенное там рассмотрение показало, что это влияние, вероятно, должно быть существенным для механики образования камуфлетной полости. Поэтому необходимо провести некоторые оценки этого влияния. То, что этот вопрос может быть разрешен лишь качественно, кажется ясным

по двум причинам. Во-первых, число доступных данных о влиянии скорости деформирования на прочность грунтов невелико, и они ограничиваются относительно низкими скоростями деформирования при низких напряжениях. Во-вторых, любое теоретическое исследование, в котором предпринимается попытка учесть этот эффект, было бы весьма затруднительным. Поэтому при учете эффекта скорости деформирования в упрощенной теории камуфлетного движения необходимо использовать *средние* значения скоростей деформации. Хотя в окрестности камуфлетной поверхности имеют место очень высокие скорости деформирования, можно показать, что их величины, осредненные по всей пластической области в фазе первичного расширения и по интервалу продолжительности этой фазы, оказываются гораздо более низкими.

При деформировании в условиях несжимаемости весь материал подвергается сдвигу со скоростью

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\theta} - \dot{\epsilon}_r) = \frac{3a^2\dot{a}}{2r^3} \quad (7.58)$$

[см. уравнение (5.31)]. Таким образом, $\dot{\gamma}$ велико, если велико $\dot{a}$, а r мало, как и в ранней стадии расширения вблизи камуфлетной поверхности. Мы ограничимся рассмотрением пластической области в фазе первичного расширения.

В произвольный момент времени t ($t_{1,e} \leq t \leq t_1$) среднее по пространству значение $\dot{\gamma}(r, t)$ равно

$$\dot{\gamma}^*(t) = \frac{1}{\frac{3}{4}\pi(b^3 - a^3)} \int_a^b 4\pi r^2 \dot{\gamma}(r, t) dr = \frac{9a^2\dot{a}}{2(b^3 - a^3)} \ln \frac{b}{a}, \quad (7.59)$$

а среднее по времени значение $\dot{\gamma}^*(t)$ в интервале $t_{1,e} \leq t \leq t_1$ равно

$$\Gamma = \frac{1}{t_{1,p} - t_{1,e}} \int_{t_{1,e}}^{t_1} \dot{\gamma}^*(t) dt. \quad (7.60)$$

Числовое значение Γ принимается за меру общей значимости скорости деформирования в фазе первичного расширения. Интеграл (7.60) в общем случае должен быть

подсчитан численными методами, хотя при $\alpha=0$ величина Γ определяется точным выражением

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{9Y}{4Et_{1,p}} \int_{a_{1,e}}^{a_1} \ln \left[\frac{2E}{3Y} \left\{ 1 - \frac{a_0^3}{a^3} \right\} \right] \frac{a^2 da}{a^3 - a_0^3} = \\ &= \frac{3Y}{4Et_{1,p}} \left[\ln \left\{ \frac{2E}{3Y} \right\} \ln \left\{ \frac{a_1^3 - a_0^3}{a_{1,e}^3 - a_0^3} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Li}_2 \left\{ \frac{a_0^3}{a_0^3 - a_{1,e}^3} \right\} - \operatorname{Li}_2 \left\{ \frac{a_0^3}{a_0^3 - a_1^3} \right\} \right], \quad (7.61)\end{aligned}$$

причем здесь предполагается, что $Y/E \ll 1$, и используется уравнение (7.22). С другой стороны, теория подобия Пенни — Тейлора совместно с предположением В (п. 6.1.3) дает как аппроксимацию формулы (7.60) следующий результат, справедливый для грунтов всех типов:

$$\Gamma = \frac{9 \ln(n) \ln(a_1/a_0)}{2(n^3 - 1) t_1}, \quad (7.62)$$

где постоянная n определяется уравнением (6.7). В случае грунтов, лишенных трения, приближенное выражение (6.46) можно далее подставить в уравнение (7.62), что даст более точную формулу для Γ .

Как следует из формул (7.61) и (7.62), величина $\Gamma t_{1,p}$ (или Γt_1) не зависит от величины заряда. Так как в соответствии с данной теорией значение $t_{1,p}$ (или t_1) линейно связано с a_0 , то отсюда следует, что Γ неограниченно возрастает с уменьшением размера заряда. В табл. 6 приведены приближенные значения Γ и $\gamma_{\max}$, рассчитанные по формулам (7.58) и (7.62) по численным значениям, данным в п. 6.1.4 для заряда в 1 фунт, заложенного на глубине 100 фут в грунтах S , P и Z . Для зарядов других размеров эти величины пересчитываются по закону обратной пропорциональности величине a_0 . Очевидно, что, несмотря на очень высокие скорости деформирования, имеющие место при камуфлетном движении, их средние значения сравнительно невелики, но все же заметны. Для средних значений деформаций Γ , приведенных в табл. 6, динамическая прочность глин и песков превышает их статическую прочность соответственно в 2 и 1,2 раза (см. п. 4.2.3 и рис. 4).

Таблица 6

Числовые значения средней и максимальной скоростей деформации в фазе первичного расширения взрывов зарядов в 1 фунт, заложенных на глубине 100 фут

Грунт	$\Gamma, \text{сек}^{-1}$	$\dot{\gamma}_{\text{max}}, \text{сек}^{-1}$
<i>S</i>	7,3	$1,5 \cdot 10^4$
<i>P</i>	4,0	$1,2 \cdot 10^4$
<i>Z</i>	22,7	$1,1 \cdot 10^4$

Поэтому для зарядов с массой 1 фунт и более можно подобрать соответствующие средние значения c и ϕ , хотя ясно, что в общем случае для учета эффектов скорости нагружения на основе данной теории необходим итерационный процесс.

При получении числовых результатов, обсуждаемых в следующем пункте, описанная выше процедура, однако, не использовалась. Вместо этого для простоты предполагалось, что значения c и ϕ , приведенные в табл. 3, относятся непосредственно к любому частному рассматриваемому динамическому случаю. Тогда по заданной частной серии результатов и значению a_0 оказывается возможным определить статические свойства грунта, которому они соответствуют. Хотя такой обратный метод обладает тем недостатком, что результаты для различных значений a_0 относятся к грунтам с различными статическими свойствами, рассмотренный в п. 4.2.3 общий характер изменения прочности грунтов, зависящий от скоростей деформирования, не может считаться достаточно хорошо определенным, чтобы имело смысл принять более сложный метод.

7.1.7. Числовые результаты

Вычисления, основанные на численном методе, описанном в п. 7.1.4, были выполнены для трех типов грунтов *S*, *P* и *Z* (см. п. 4.2.3) и для четырех глубин заложения заряда — 50, 100, 250 и 500 фут. Согласно программе

вычислений, определялись радиусы камуфлетной поверхности и упруго-пластической границы во время фаз первичного расширения и сжатия и составные части распределения энергии только в фазе первичного расширения. Здесь приведены в виде таблиц и графиков только выборочные данные из полученных числовых результатов. Краткое резюме типичных результатов приведено в табл. 7. Эти результаты даны в основном в безразмерной форме, так что они применимы для заряда любого размера (см. табл. 5 и 11). В табл. 9 приведены в размерной форме некоторые результаты для заряда 1 фунт.

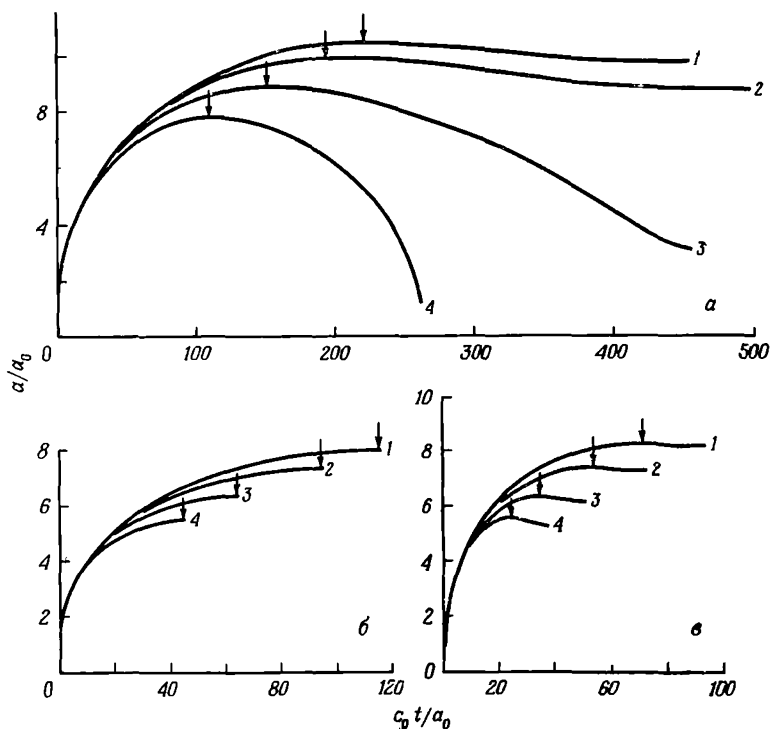
Таблица 7

Сводка результатов, представленных в табл. 4, 8, 9
и 10 и на рис. 5—10

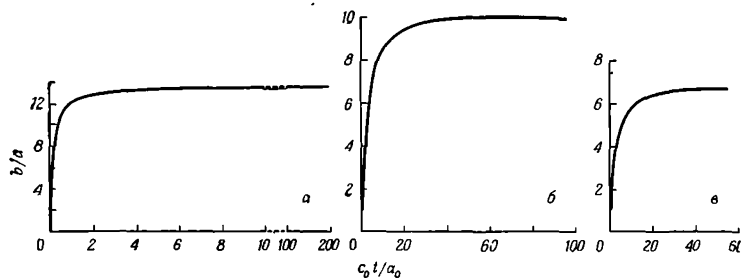
Символы A , B относятся к моделям точечного источника при предположении A и B , символ C соответствует модели сферического заряда.

Результаты	Грунт	h , фут	Модель	Переменные	Интервал времени
Табл. 4	S, P, Z	100	A, B	$\tau_1, a_1/a_0, b/a$	—
Табл. 8	$S, P, Z (MS)$	50, 100, 250, 500	C	$\tau_1, \tau_2, a_1/a_0, a_1, e/a_0, a_2/a_0, b_1/a_1, d_2/a_2$	—
Табл. 9	S, P, Z	100	C	$t_1, t_2, a_1, a_2, b_1, d_2$	—
Табл. 10	S, P, Z	50, 100, 250, 500	C	U_2, U_3, U_4	—
Рис. 5	S, P, Z	100	A, B, C	$\tau, a/a_0$	$0 \leq \tau \leq \tau_1$
Рис. 6	S, P, Z	50, 100, 250, 500	C	$\tau, a/a_0$	$0 \leq \tau \leq \tau_2$
Рис. 7	S, P, Z	100	C	$\tau, b/a$	$0 \leq \tau \leq \tau_1$
Рис. 8	S, P, Z	100	C	$\tau, a/c_0$	$0 \leq \tau \leq \tau_1$
Рис. 9	S	100	C	$\tau, P/P_0$	$0 \leq \tau \leq \tau_1$
Рис. 10	S	100	C	$\tau, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$	$0 \leq \tau \leq \tau_1$

Очевидно, что некоторые характеристики возмущения, например изменение во времени радиусов камуфлетной



Р и с. 6. Изменение камуфлетного радиуса во времени в фазах первичного расширения и сжатия, согласно модели сферического заряда. Взрывы на глубине 50 футов (кривая 1), 100 футов (кривая 2); 250 футов (кривая 3) и 500 футов (кривая 4) в грунтах S (рис. а), P (рис. б) и Z (рис. в). Стрелками отмечено максимальное расширение (сжатие незначительно в грунте P).



Р и с. 7. Изменения во времени отношения радиуса упруго-пластической границы к радиусу камуфлетной поверхности в фазе первичного расширения, согласно модели сферического заряда.

Взрывы на глубине 100 футов в грунтах S (рис. а), P (рис. б) и Z (рис. в).

Таблица 8

**Числовые значения переменных, согласно модели
сферического заряда**

τ_1, τ_2 — безразмерные значения времени;
 $a_{1,e}/a_0, a_1/a_0, a_2/a_0$ — безразмерные радиусы камуфлетной поверхности;
 $b_1/a_1, d_2/a_2$ — отношения радиусов упруго-пластической границы и камуфлетной поверхности.
 Индексы 1, 2 относятся соответственно к концам фаз первичного расширения и сжатия.

Грунт	Переменная	Глубина заложения заряда, <i>фут</i>			
		50	100	250	500
S	τ_1	221,4	197,3	150,2	109,2
	$a_{1,e}/a_0$	1,00013	1,00013	1,00013	1,00013
	a_1/a_0	10,47	9,989	8,933	7,838
	b_1/a_1	13,57	13,57	13,57	13,56
	τ_2	454,3	497,9	488,0	262,3
	a_2/a_0	9,849	8,806	3,165	1,305
	d_2/a_2	6,315	8,313	29,94	64,61
P	τ_1	114,7	94,19	64,19	44,41
	$a_{1,e}/a_0$	1,197	1,197	1,197	1,197
	a_1/a_0	8,005	7,435	6,436	5,600
	b_1/a_1	10,82	9,959	8,442	7,176
	τ_2	125,7	105,0	74,24	53,60
	a_2/a_0	7,993	7,420	6,414	5,569
	d_2/a_2	1,274	1,315	1,385	1,435
Z	τ_1	70,59	52,65	33,58	23,18
	$a_{1,e}/a_0$	1,419	1,419	1,419	1,419
	a_1/a_0	8,297	7,500	6,418	5,637
	b_1/a_1	7,876	6,665	5,192	4,254
	τ_2	92,16	72,02	49,85	37,09
	a_2/a_0	8,199	7,370	6,127	5,355
	d_2/a_2	1,374	1,374	1,372	1,368
MS	τ_1	—	—	137,1	—
	$a_{1,e}/a_0$	—	—	1,040	—
	a_1/a_0	—	—	8,423	—
	b_1/a_1	—	—	12,85	—
	τ_2	—	—	141,2	—
	a_2/a_0	—	—	8,426	—
	d_2/a_2	—	—	1,050	—

Таблица 9

Числовые значения переменных, согласно модели сферического взрыва

Взрыв сферического заряда весом 1 фунт (радиус 0,137 фут) при глубине заложения 100 фут.

t_1, t_2 — значения времени, мсек;

a_1, a_2 — радиусы камуфлетной поверхности, фут;

b_1, d_2 — радиусы упруго-пластической границы, фут.

Индексы 1, 2 относятся соответственно к концам фаз первичного расширения и сжатия;

c_0 — характерная скорость, фут сек [см. уравнение (7,39)];

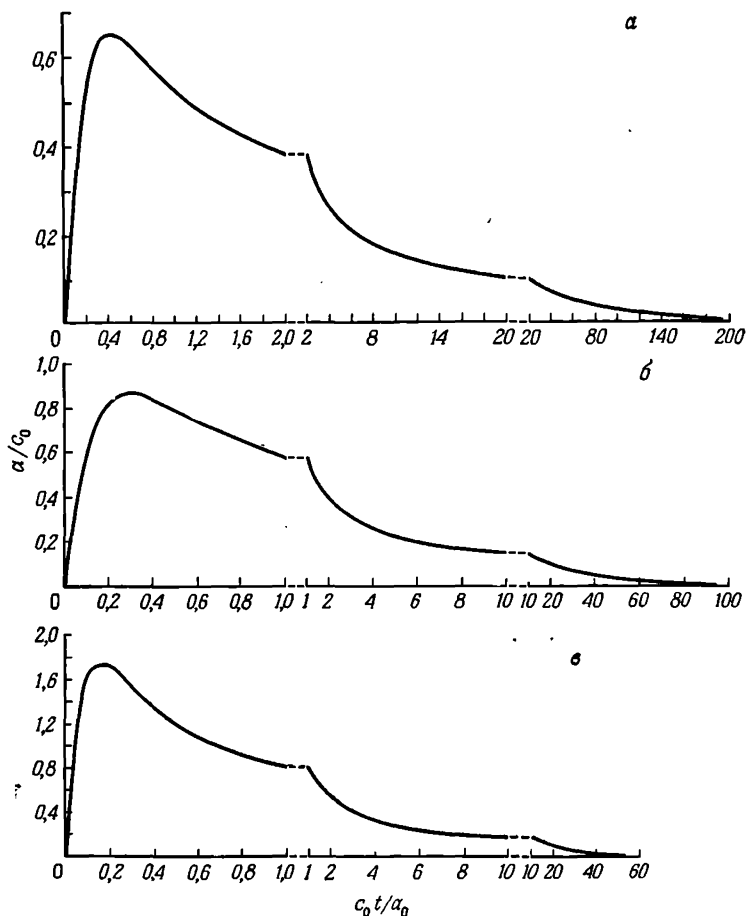
Π — начальное гидростатическое давление, фунт дюйм² [см. уравнение (5,28)].

Грунт	t_1	a_1	b_1	t_2	a_2	d_2	c_0	Π
<i>S</i>	11,43	1,364	18,51	28,84	1,203	9,999	2358	101,5
<i>P</i>	7,472	1,016	10,11	8,327	1,014	1,333	1722	101,5
<i>Z</i>	7,472	1,025	6,829	10,22	1,007	1,383	962,6	84,14

поверхности и упруго-пластической границы, проявляют при детальном рассмотрении сильную зависимость от типа грунта и глубины заложения заряда. Однако ряд общих заключений о камуфлетном движении можно получить из результатов, приведенных в таблицах и графиках этой статьи.

Рассматривая образование камуфлетной полости, Девоншир и Мотт [1] высказали гипотезу, что «начальное высокое давление расширяющихся газов приводит окружающий грунт в такое быстрое движение, направленное во внешнюю область, что его кинетическая энергия сохраняется долго после того, как давление газов упадет до пренебрежимой величины». Эта гипотеза широко подтверждается результатами данного исследования. Так, например, из рис. 9 и 10 следует, что в типичном случае взрыва на глубине 100 фут в грунте *S* через время, равное одной двенадцатой части продолжительности фазы первичного расширения, давление в газах падает до одной тысячной от его начального значения, и суммарная полная энергия газов и грунта представлена в основном в форме кинетической энергии грунта. В последующем другие составные части энергии грунта возрастают главным образом за счет этой кинетической энергии и лишь в очень малой степени за

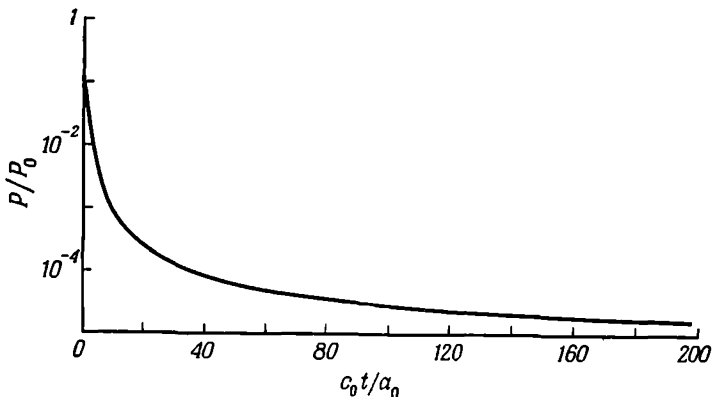
счет энергии газов. Изменение во времени скорости камуфлетной поверхности в фазе первичного расширения, приведенное на рис. 8, говорит об исключительно быстрой генерации движения.



Р и с. 8. Изменение во времени скорости камуфлетной поверхности в фазе первичного расширения, согласно модели сферического заряда.

Взрывы на глубине 100 фут в грунтах *S* (рис. *a*), *P* (рис. *б*) и *Z* (рис. *в*).

Рассмотрим теперь вопрос о степени соответствия данных согласно моделям точечного и сферического зарядов в фазе первичного расширения. Эти модели различаются заметно по получаемой величине отношения b/a . Для модели точечного заряда это отношение постоянно. Согласно модели сферического заряда, по мере развития деформаций эта величина возрастает от единицы (при первом появлении пластической деформации) до значения, при-



Р и с. 9. Изменения во времени давления, оказываемого продуктами взрыва ТНТ на камуфлетную поверхность в фазе первичного расширения, согласно модели сферического заряда.

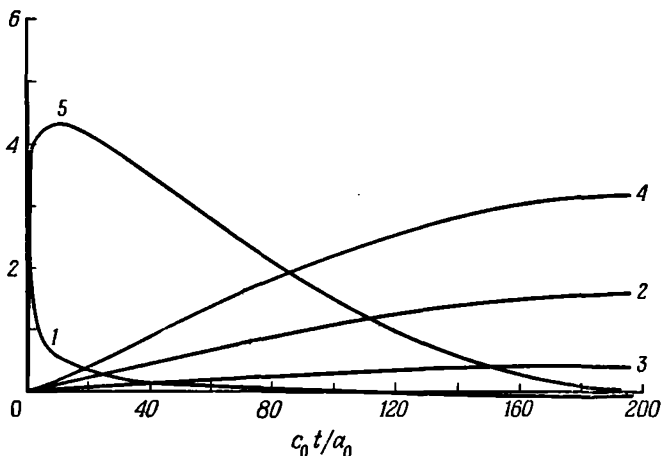
Взрыв на глубине 100 *фут* в грунте *S*.

мерно равного полученному согласно модели точечного источника. Однако подробные числовые результаты показывают, что это увеличение имеет место в основном на ранней стадии движения. Так, например, согласно рис. 7, для глубины заложения заряда 100 *фут* отношение b/a близко к своему конечному значению для последних 99, 80 и 65% продолжительности фазы первичного расширения соответственно для грунтов *S*, *P* и *Z*.

На рис. 5 и в табл. 4 и 8 снова для той же глубины заложения заряда 100 *фут* проведено сопоставление предсказаний для некоторых других параметров, полученных по обоим моделям. Очевидно, что степень совпадения существенно зависит от типа грунта: для грунта *S* оно хорошее, для грунта *P* удовлетворительное, а для *Z* плохое.

Таким образом, совпадение результатов двух моделей ухудшается по мере возрастания внутреннего трения грунта.

Характер этих результатов, по-видимому, является частично следствием того факта, что модель точечного источника может рассматриваться как хорошая аппроксимация модели сферического заряда только в условиях, когда a_0^3 гораздо меньше, чем a^3 за большую часть времени



Р и с. 10. Изменение во времени составных частей распределения энергии (10^5 фут/фунт) в фазе первичного расширения согласно модели сферического заряда.

Взрыв заряда 1 фунт ТНТ на глубине 100 фут в грунте *S*. 1 — энергия продуктов взрыва ($5,09 \cdot 10^5$ фут/фунт на 1 фунт ТНТ, уходящего на образование полости); 2 — потенциальная энергия, аккумулированная на бесконечности; 3 — полная энергия упругих деформаций грунта; 4 — полная пластическая работа, совершенная над грунтом; 5 — полная кинетическая энергия грунта.

движения. Ясно, что этот критерий лучше выполняется для грунта *S*, чем для грунтов *P* и *Z*, но он не может быть единственным существенным фактором, поскольку не может адекватным образом служить для различия между двумя последними грунтами.

Фаза первичного сжатия рассматривается только для модели сферического заряда. Результаты, приведенные на рис. 6 и в табл. 8, показывают, что для грунтов *P* и *Z*

Таблица 10

Распределение энергии, согласно модели сферического заряда

U_2 — потенциальная энергия, аккумулированная на бесконечности;

U_3 — полная энергия упругих деформаций грунта;

U_4 — полная пластическая работа, выполненная над грунтом.

Это распределение рассчитывается на конец фазы первичного расширения и выражается в процентах от полной выделяющейся энергии.

Грунт	Составная часть энергии	Глубина заложения заряда, <i>фут</i>			
		50	100	250	500
<i>S</i>	U_2	19,8	30,2	49,6	65,6
	U_3	9,1	7,9	5,7	3,9
	U_4	71,1	61,9	44,6	30,5
<i>P</i>	U_2	9,0	12,7	19,1	24,8
	U_3	4,9	5,0	5,3	5,7
	U_4	86,0	82,2	75,6	69,6
<i>Z</i>	U_2	8,5	10,8	15,4	20,3
	U_3	4,0	4,7	6,0	7,2
	U_4	87,5	84,4	78,6	72,5

в рассматриваемом интервале глубин заложения заряда камуфлетное движение практически является аperiодическим (см. п. 2.3). Напротив, в грунте *S*, лишенном трения, дело обстоит иначе. При $h=100$ *фут* амплитуда движения сжатия существенна, а при $h=500$ *фут* имеет место практически полное возвратное движение, причем фазы первичного расширения и сжатия весьма сходны с фазами движения газового пузыря, возникающего при подводном взрыве. Этого и следовало ожидать, судя по результатам, приведенным в табл. 10, которая иллюстрирует распределение энергии в конце фазы первичного расширения. Можно видеть, что для грунта *S* часть полной энергии, накопленная к этому времени в виде обратимой энергии, велика

и составляет около 40% при $h=100$ фут и 70% при $h=500$ фут. Таким образом, при этом относительно большая доля полной энергии способна вызвать сжатие продуктов взрыва.

Мы видим, что внутреннее трение грунтов имеет решающее значение для определения протяженности фазы первичного сжатия. Это связано с тем фактом, что в грунтах, лишенных трения, в фазе первичного расширения рассеивается гораздо меньшая доля полной энергии. Далее, из второго уравнения (5.34) и (7.18) видно, что скорость изменения пластической работы на единицу объема существенно зависит от значения величины $q = \alpha \sigma_r - Y$. При α , строго равном нулю, q имеет порядок Y , но при весьма малых α , скажем 0,1, величина q имеет порядок $10^3 Y$, поскольку $|\sigma_r|$ может быть порядка P_0 (P_0 имеет порядок $10^4 Y$). Это означает, что характер движения грунта, обладающего малым трением (т. е. грунта с малым, но ненулевым значением α), радикально отличен от характера движения грунта, лишенного трения ($\alpha=0$). Для проверки этой гипотезы были выполнены расчеты для другого типа грунта, грунта MS . Этот грунт обладает теми же свойствами, что и грунт S , за исключением того, что его угол внутреннего трения взят равным 1° (см. табл. 3). В табл. 8 приведены числовые результаты для глубины заложения заряда 250 фут. Сопоставление соответствующих результатов для грунтов S и MS подтверждает приведенное выше утверждение. Нужно заметить, однако, что влияние внутреннего трения в фазе расширения относительно мало. Вполне возможно, что критическое значение α , ниже которого грунт со слабым трением является фактически лишенным трения, имеет порядок 10^{-4} . Далее, вряд ли величина α может вообще быть такой малой, поскольку все грунты обязательно обладают некоторым внутренним трением; во всяком случае, не было получено имеющих смысл данных, обладающих такой степенью точности.

Таким образом, дальнейший вывод настоящего анализа состоит в следующем: хотя образование камуфлетной полости не является бесколебательным для грунтов, лишенных внутреннего трения, маловероятность существования в реальных условиях такого идеального материала означает, что эта возможность на практике должна быть полностью

исключена. Другими словами, образование камуфлетной полости ощутимо бесколебательно при любых представляющих интерес практических условиях, как и было предсказано Пенни (1954, личное сообщение).

Наконец, нужно заметить, что большинство числовых результатов, полученных по модели сферического заряда, представлено здесь, как можно было видеть, в безразмерной форме, а потому при их использовании для получения данных для конкретных размеров заряда снова надо помнить об ограничениях, отмеченных в п. 6.1.4. Поскольку мы располагаем результатами для некоторого диапазона глубин заложения заряда, то можно расширить область применения данных, приведенных в табл. 5, выразив критерий применимости теории в форме

$$h \geq m W^n. \quad (7.63)$$

Согласно полученным результатам для $h \leq 500$ фут, параметры m и n принимают значения, данные в табл. 11. Здесь вес заряда W выражен в фунтах ТНТ, а глубина заложения заряда h — в футах.

Таблица 11

Значения параметров применимости
(7.63) массы заряда для глубин
заложения заряда, не превосходящих
500 фут

Грунт	m	n
S	22	0,29
P	18	0,25
Z	15	0,35

7.1.8. Сравнение с экспериментальными данными

Имеется очень мало данных об образовании камуфлетной полости, и большинство из них относится к такой глубине заложения заряда, которая достаточна для того, чтобы не было существенных разрушений на поверхности

грунта. Очевидно, что этот критерий налагает существенно менее сильные ограничения, чем критерий, приведенный в п. 7.1.7, который требует, чтобы глубина заложения заряда была достаточной для сохранения условий сферической симметрии. Во время второй мировой войны были предприняты экспериментальные работы, направленные на оказание помощи в нахождении неразорвавшихся бомб. Полученные при этом результаты показывают, что для того, чтобы поверхность земли не разрушалась, глубина заложения заряда должна быть равной от 3,5 до $7W^{1/3}$ фут (в зависимости от типа грунта).

Что касается размеров камуфлетной полости, то все имеющиеся британские работы были суммированы Христоферсоном [1], который установил, что только при немногих взрывах, исключительно в глинах, камуфлетные полости были обследованы и измерены. Обычно обнаруживалось, что каверны были почти сферическими объемом от 9 до $11 W$ фут³ (или диаметром от 2,5 до $2,7 W^{1/3}$ фут). При этом не уточняется тип глин, а также глубина заложения заряда, которая предположительно была относительно малой. Для сравнения отметим, что результаты расчета для грунта S при глубине заложения заряда 50 фут приводят к диаметру камуфлетной полости, равному $2,9 W^{1/3}$ фут, или после экстраполяции до нулевой глубины заложения заряда (или скорее до Π , равного $14,7$ фунт/дюйм²) к диаметру, равному примерно $3,0 W^{1/3}$ фут. Таким образом, в этом случае имеется, по-видимому, удовлетворительное совпадение расчетов о размерах камуфлетной полости, согласно настоящей камуфлетной модели, с экспериментальными данными.

7.2. Определяющие уравнения для больших упругих деформаций

Числовые результаты, приведенные в табл. 8 для модели образования камуфлетной полости от сферического заряда, говорят о том, что за время упругой части фазы первичного расширения могут иметь место большие упругие деформации, если грунт обладает трением. Этот эффект является следствием формы уравнения (7.16). В п. 1 благодаря использованию конвективной формы гуксовых соот-

ношений деформация — напряжение учитывались конечные упругие деформации при условии несжимаемости материала. Экспериментальные данные о механическом поведении грунтов при высоких интенсивностях напряжений отсутствуют. При малых упругих деформациях экспериментальные данные подтверждают использование закона Гука, но в случае конечных упругих деформаций выбор соответствующих связей деформация — напряжение из широкого диапазона возможностей должен в основном определяться соображениями математической целесообразности. С целью сравнения ниже будет проведен краткий анализ (аналогичный приведенному в п. 7.1.1), при котором используются конечные неогукovy (вместо конвективно-гукovy) деформации несжимаемого материала. Так называемое неогукovo тело является частным случаем среды Муни (см. Грин и Церна [1, стр. 76 и 104—108]).

В условиях сферической симметрии связь между напряжением и перемещением в несжимаемом упругом неогуковом теле дается выражением

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{E}{3} \left\{ \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} \quad (7.64)$$

для материальной точки с текущей координатой r и начальной координатой $r_0(r)$, где E — физическая константа, которая в случае малых деформаций, как будет показано ниже, является модулем Юнга. Условие несжимаемости требует, чтобы

$$r^3 - r_0^3 = a^3 - a_0^3. \quad (7.65)$$

Тогда уравнение (7.64) принимает вид

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{E}{3} \frac{(a^3 - a_0^3)(2r^3 - a^3 + a_0^3)}{r^4(r^3 - a^3 + a_0^3)^{2/3}}. \quad (7.66)$$

Так как $a \geq a_0$, из уравнения (7.66) следует, что $\sigma_\theta \geq \sigma_r$. Если правую часть уравнения (7.66) разложить в ряд по $(a^3 - a_0^3)/r^3$ до члена первого порядка и сравнить результат с выражением для $\sigma_\theta - \sigma_r$, найденным, согласно обобщенному закону Гука при $\nu = 1/2$, то видно, что величина E есть модуль Юнга.

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r^2} - \frac{2a^4 \dot{a}^2}{r^5} \right\}. \quad (7.67)$$

Поэтому, согласно уравнениям (7.66) и (7.67), напряжение σ_r удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r^2} - \frac{2a^4 \dot{a}^2}{r^5} \right\} + \\ + \frac{2E(a^3 - a_0^3)(2r^3 - a^3 + a_0^3)}{3r^5(r^3 - a^3 + a_0^3)^{2/3}}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Интегрирование этого уравнения при граничном условии (5.27) для напряжений на бесконечности дает

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\Pi - \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\} + \\ &+ \frac{E}{6} \left\{ \frac{(r^3 - a^3 + a_0^3)^{1/3}(5r^3 - a^3 + a_0^3)}{r^4} - 5 \right\}, \\ \sigma_\theta &= -\Pi - \rho_0 \left\{ \frac{a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r} - \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \right\} + \\ &+ \frac{E}{6} \left\{ \frac{5r^6 - 2(a^3 - a_0^3)r^3 - (a^3 - a_0^3)^2}{r^4(r^3 - a^3 + a_0^3)^{2/3}} - 5 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.69)$$

Граничное условие (5.27) для напряжений на камуфлетной поверхности показывает, что величина a удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) + \frac{E}{6} \left[5 - \frac{4a_0}{a} - \left\{ \frac{a}{a_0} \right\}^4 \right] - \\ - P(a) + \Pi = 0. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Согласно уравнениям (7.14) и (7.64), текучесть впервые будет иметь место на камуфлетной поверхности при $a = a_{1,e}$, где

$$(1 + \alpha) \frac{E}{3} \left[\left\{ \frac{a_{1,e}}{a_0} \right\}^2 - \left\{ \frac{a_0}{a_{1,e}} \right\}^4 \right] = Y + \alpha P(a_{1,e}) \quad (7.71)$$

[ср. с уравнением (7.16)]. Из этого уравнения следует также, что в случае грунтов, обладающих трением, до наступления текучести около камуфлетной поверхности будут иметь место большие упругие деформации (см. табл. 12).

Таблица 12

Числовые результаты, согласно моделям сферического заряда, учитывающим конвективно-гуковы или неогуковы упругие деформации

Глубина заложения заряда 100 фут

τ_1 — безразмерное время;
 $a_{1,e}/a_0$ — безразмерный радиус камуфлетной поверхности, соответствующий появлению пластической текучести;
 a_1/a_0 — безразмерный радиус камуфлетной поверхности в конце фазы первичного расширения;
 b_1/a_1 — отношение радиуса упруго-пластической границы к радиусу камуфлетной поверхности в конце фазы первичного расширения;
 C, N означают предположения о конвективно-гуковом или неогуковом характере упругих деформаций.

Грунт	Предположение	τ_1	$a_{1,e}/a_0$	a_1/a_0	b_1/a_1
S	C	197,3	1,00013	9,989	13,57
	N	197,3	1,00013	9,989	13,57
P	C	94,19	1,197	7,435	9,959
	N	94,30	1,208	7,443	9,957
Z	C	52,65	1,419	7,500	6,665
	N	52,82	1,440	7,524	6,663

Анализ движения после завершения упругой части фазы первичного расширения аналогичен проведенному в п. 7.1.1, б и далее здесь опускается.

7.2.1. Числовые результаты

В табл. 12 приведены числовые значения τ_1 , $a_{1,e}/a_0$, a_1/a_0 и b_1/a_1 для трех грунтов S, P и Z при глубине заложения заряда 100 фут. Видно, что имеется хорошее совпадение результатов, подсчитанных согласно моделям, учитывающим конвективно-гуковы и неогуковы упругие дефор-

мации. Из таблицы следует, что числовые результаты не сильно зависят от частного выбора упругих соотношений деформации — напряжения.

7.3. Другие теории

Наиболее серьезным ограничением описанной в п. 7.1 модели образования камуфлетной полости при сферическом заряде является предположение об упругой несжимаемости, и маловероятно, что вносимые этим ошибки незначительны. Если эффекты сжимаемости в упругой области были бы учтены, то анализ стал бы более сложным, прежде всего в силу того факта, что потребовалось бы определить волновое упругое движение в бесконечной области, ограниченной изнутри *движущейся* упруго-пластической границей. Если при этом еще сохраняется предположение о несжимаемости для пластической области, то возникают трудности в соответствующем согласовании упругого и пластического полей на упруго-пластической границе, и до сих пор не развита удовлетворительная модель такого типа. Однако если отказаться от модели сферического заряда, рассмотренной в п. 7.1, то логично полностью учитывать эффекты упругой сжимаемости и с самого начала пользоваться чисто численным методом исследования. Такой метод до настоящего времени не был предложен даже для простейшего случая грунта, лишенного трения.

Здесь нужно отметить модель сферического заряда, предложенную Хикксом (1954, частное сообщение), которая основывалась на соображениях, не связанных с теорией подобия (см. п. 6.2). Камуфлетное уравнение теории Хиккса совместно с начальными условиями $a=a_0 (\neq 0)$, $\dot{a}=0$ и $b=a_0$ при $t=0$ не приводит, за исключением случая $\alpha=0$, к геометрическому подобию в противоположность системе камуфлетных уравнений (6.12) и (6.38) модели точечного источника (п. 6.1) при использовании предположения В. В отличие от теории, излагаемой в п. 7.1, модель Хиккса не учитывает упругих деформаций, которые имеют место в начале фазы первичного расширения.

В Советском Союзе также были выполнены работы, посвященные взрывам в твердых средах и особенно в пористых грунтах. В этих работах, которые, по-видимому,

были начаты статьей Компанейца [1], рассматривались типы идеального грунта, отличные от изучаемых в данной статье. Обширные исследования были выполнены Кукуджановым [1], Ловецким [1], [2], Ромашовым, Родионовым и Сухотиным [1], Андрианкиным и Корявовым [1] и Зволинским [1] (см. также статью Кочиной и Мельниковой [1], которые, следуя работе Седова [1], стр. 235 и далее, рассматривают решения, основанные на соображениях подобия). Частичный обзор этих работ был дан Кристеску ([1], стр. 227 и далее; [2]). Здесь не предпринимаются попытки подробного изложения этих статей, но поскольку работа Зволинского [1] представляет интерес, приведем здесь краткое ее содержание.

Анализ Зволинского [1] посвящен подземной детонации заряда взрывчатки в условиях сферической симметрии. Бесконечная однородная область грунта, в котором закладывается заряд, интерпретируется как упруго-идеально-пластическая среда. В упругой области выполняется закон Гука. Переход из упругого состояния в пластическое сопровождается мгновенным увеличением плотности. В пластической области плотность постоянна и выполняется условие пластичности, эквивалентное условию разрушения Кулона. Это условие следует из гипотезы о скорости изменения пластической работы. В последующем анализе рассматривается только один частный случай [соответствующий уравнению (6.1) при $\alpha=1$]. Дальнейшее за иницированием взрыва в центре заряда движение грунта разделяется на четыре стадии (без подробного учета движения продуктов взрыва). В течение первой стадии во внешнюю зону от камуфлетной поверхности движется ударная волна, уплотняющая оставшийся за ней грунт. С ростом радиуса ударного фронта скорость ударной волны уменьшается. Вторая стадия начинается с момента, когда эта скорость становится равной скорости упругой волны сжатия в грунте. При этом упругая волна сжатия отделяется от ударного фронта и уходит вперед. Скорость ударной волны продолжает уменьшаться и в конце концов разрыв скорости частиц на фронте спадает до нуля, ударная волна перестает существовать. Этим отмечается начало третьей стадии, и затем граница между пластически и упруго деформированными областями интерпретируется как движу-

щийся контактный разрыв, на котором продолжают возникать упругие волны. В дальнейшем происходит пластическое деформирование, но упруго-пластическая граница и камуфлетная поверхность быстро переходят в состояние покоя. Наконец, во время четвертой стадии движение полностью состоит из упругих волн. Поскольку уплотненный грунт предполагается несжимаемым, переменную времени можно эффективно исключить из анализа, а основные уравнения сводятся к обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка. Получив эти уравнения и сформулировав условия, которым должны удовлетворять их решения, Зволинский выявил основные черты образования камуфлетной полости без проведения подробных расчетов.

8. Заключительные замечания

Исследования по теоретической механике явлений взрыва в грунтах обязательно основываются на моделях, предполагающих значительное упрощение физики процесса как из-за сложности физических характеристик грунта, так и в интересах возможностей математической трактовки. Однако можно думать, что принятая в данной работе модель глубинного подземного взрыва обеспечивает реалистический учет крупномасштабных черт камуфлетного движения. К главным ее недостаткам относятся пренебрежение сжимаемостью грунта, что исключает эффекты, связанные с распространением упругих и пластических волн, и экстраполяция поведения грунта в обычных условиях на условия взрыва.

Основные выводы, полученные из анализа модели, заключаются в следующем. Во всех представляющих практический интерес случаях начальное расширение камуфлетной полости велико и происходит быстро, причем обширная область окружающего грунта подвергается пластическому деформированию. Амплитуды всех последующих пульсаций малы. Характер возмущения существенно зависит от типа грунта и от глубины, на которой производится взрыв.

Хотя модели, использующие теорию пластичности грунта, определенно не отвечают полностью требованиям

изучения процессов, включающих из-за взрывов большие деформации грунта, можно думать, что настоящее исследование реалистично и является шагом вперед в изучении механики глубинных подземных взрывов.

Работа, излагаемая в данной статье, была начата в 1956 г. в Олдермастоне (П. Чедвиком) и в Форт-Халстэде (А. Д. Коксом и Г. Г. Гопкинсом); оба исследования проводились независимо, пока не был проведен впервые подробный числовой подсчет в 1958 г. В данной статье собраны вместе основные результаты работы, выполненной тремя авторами.

Авторы выражают благодарность члену Королевского общества сэру Джеффри Тейлору и члену Королевского общества сэру Вильяму Пенни за привлечение внимания к данному исследованию задачи и за любезное согласие включить в эту статью их решения об образовании камуфлетной полости в грунтах, основанного на соображениях подобия. Большую пользу в начале работы в Олдермастоне принес интерес, проявленный Хикксом и Спорджи, первый из которых разрешил сослаться в этой статье на его неопубликованное обобщение теории Пенни—Тейлора. В Олдермастоне Пирсон провел большое число предварительных расчетов на вычислительной машине Дьюс; далее расчеты проводились на машинах IBM, помощь в проведении которых оказывал Полмер. Наконец, авторы признательны д-ру Кулингу (Строительный исследовательский центр, Гарстон) и Гибсону (Отдел гражданского строительства, Имперский политехнический колледж, Лондон) за их советы в выборе физических данных для грунтов и профессору, члену Королевского общества, Хиллу за его замечания к этой работе.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Ниже приводится список используемых обозначений. Определение всех символов дается, когда они впервые встречаются в тексте, но нужно заметить, что некоторые из них имеют различный смысл в различных контекстах.

E — модуль Юнга;	}	Физические постоянные грунта
μ — модуль сдвига;		
ν — коэффициент Пуассона;		
c — сцепление;		
φ — угол внутреннего трения;		
$Y = 2 c \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$ — параметр предела текучести;		
$\alpha = 2 \sin \varphi / (1 - \sin \varphi)$ — параметр сопротивления сдвигу;	}	
ρ — плотность;		
S, P, Z, MS — индексы различных типов идеальных грунтов (см. п. 4.2.3);		
P — давление, производимое продуктами взрыва тротила на камуфлетной поверхности;		
γ_1, γ_2 — показатели адиабаты продуктов взрыва тротила;		
$\mathcal{E}$ — энергия, освобождающаяся при взрыве ВВ;		

- p_a — атмосферное давление;
 h — глубина заложения заряда ВВ;
 g — ускорение силы тяжести;
 $\Pi = p_a + \rho gh$ — начальное равномерное гидростатическое давление в идеальном грунте;
 $ex, s, a, 0$ — индексы, относящиеся к продуктам взрыва, грунту, атмосфере и начальным условиям соответственно;
 r — радиальная координата;
 t — время;
 u, v — радиальные смещение и скорость;
 $\dot{F} \equiv \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial r}$ — конвективная производная произвольной функции F ;
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta$ — радиальная и тангенциальная компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций;
 $\dot{\epsilon}_r^e, \dot{\epsilon}_\theta^e, \dot{\epsilon}_r^p, \dot{\epsilon}_\theta^p$ — радиальная и тангенциальная компоненты тензоров скоростей упругой и пластической деформаций;
 f — функция текучести;
 $\dot{\lambda}$ — параметр скорости пластического течения;
 $\dot{W}, \dot{W}^e, \dot{W}^p$ — скорости изменения общей, пластической и упругой работы, производимой в грунте (на единицу объема);
 a — радиус камуфлетной поверхности;
 b, d — радиусы упруго-пластической границы в фазах первичного расширения и сжатия соответственно;
 U_1 — общее количество энергии, выделенной из продуктов взрыва;

- | | |
|---|--|
| U_2 — потенциальная энергия, аккумуля- | } Состав-
ные час-
ти энер-
гии |
| лированная на бесконечности; | |
| U_3 — полная упругая энергия грунта; | |
| U_4 — полная пластическая работа, произведенная в грунте; | |
| U_5 — полная кинетическая энергия грунта; | |
- $t_i, i=1, 2, \dots$, — продолжительности последовательных фаз расширения и сжатия камуфлетного движения;
- $t_{i, e}, t_{i, p}, i = 1, 2, \dots$, — продолжительности упругой и упруго-пластической частей фаз камуфлетного движения.

ЛИТЕРАТУРА

Андрианкин Э. И., Корявов В. П.

1. Докл. АН СССР, 128, 257 (1959).

Био (Biot M. A.)

1. *J. Appl. Phys.*, 12, 155 (1941).
2. *J. Appl. Phys.*, 12, 426 (1941);
3. *J. Appl. Phys.*, 26, 182 (1955); русский перевод: сб. *Механика* № 1 (35), 140—146 (1956).
4. *J. Appl. Mech.*, 23, 91 (1956).
5. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 28, 168 (1956).
6. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 28, 179 (1956).

Био, Клинган (Biot M. A., Clingan F. M.)

1. *J. Appl. Phys.*, 12, 578 (1941).
2. *J. Appl. Phys.*, 13, 35 (1942).

Бишоп, Элдин (Bishop A. W., Eldin G.)

1. *Géotechnique*, 2, 13 (1950).

Бишоп, Хилл, Мотт (Bishop R. F., Hill R., Mott N. F.)

1. *Proc. Phys. Soc.*, 57, 147 (1945).

Гилл (Gill S.)

1. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 47, 96 (1951).

Гласстон (Glasstone S. (ed.))

1. The effects of nuclear weapons, rev. ed., Washington, United States Atomic Energy Commission, 1962.

Гопкинс (Hopkins H. G.)

1. Progress in solid mechanics, vol. 1 (ed. I. N. Sneddon, R. Hill), ch. III, Dynamic expansion of spherical cavities in metals, Amsterdam, North-Holland, 1960.
(Русск. пер.: Динамические неупругие деформации металлов, изд-во «Мир», М., 1964.)
2. *Appl. Mech. Rev.*, 14, 417 (1961).

Грин, Церна (Green A. E., Zerna W.)

1. Theoretical elasticity, 1954, Oxford University Press.

Девоншир, Мотт (Devonshire A. F., Mott N. F.)

1. Unpublished Report, Ministry of Supply, 1944.

- Д ж е н и к е, Ш и л д (J e n i k e A. W., S h i e l d R. T.)
1. *J. Appl. Mech.*, 26, 599 (1959).
- Д ж е ф ф р и с (J e f f r e y s H.)
1. *Cartesian tensors*, Cambridge University Press, 1931.
- Д ж о н с, М и л л е р (J o n e s H., M i l l e r A. R.)
1. *Proc. Roy. Soc.*, A194, 480 (1948).
- Д р у к к е р (D r u c k e r D. C.)
1. *J. Mech. and Phys. Solids*, 1, 217 (1953).
- Д р у к к е р, П р а г е р (D r u c k e r D. C., P r a g e r W.)
1. *Quart. Appl. Math.*, 10, 157 (1952).
- З в о л и н с к и й Н. В.
1. *Прикл. матем. и механ.*, 24, 126 (1960).
- К о й т е р (K o i t e r W. T.)
1. *Quart. Appl. Math.*, 11, 350 (1953).
- К о к с (C o x A. D.)
1. *Internat. J. Mech. Sci.*, 4, 371 (1962).
- К о к с, И с о н, Г о п к и н с (C o x A. D., E a s o n G., H o r -
k i n s H. G.)
1. *Philos. Trans.*, A254, 1 (1961).
- К о м п а н е е ц А. С.
1. *Докл. АН СССР*, 109, 49 (1956).
- К о у л (C o l e R. H.)
1. *Underwater explosions*. Princeton University Press, 1948.
(Русск. пер.: Подводные взрывы, ИЛ, М. 1950).
- К о ч и н а Н. Н., М е л ь н и к о в а Н. С.
1. *Прикл. матем. и механ.*, 22, 3 (1958).
- К р и с т е с к у (C r i s t e s c u N.)
1. *Dynamic problems in the theory of plasticity* (in Roumanian),
Bucharest, Academia Rebulicii Populare Romine, 1958.
2. *Plasticity*, Proceedings of the Second Symposium on Naval
Structural mechanics (ed. E. H. Lee, P. S. Symonds), Ox-
ford, Pergamon Press, 1960.
- К р э г г с (C r a g g s J. W.)
1. *Progress in solid mechanics*, vol. II (ed. I. N. Sneddon,
R. Hill), ch. IV, Plastic waves, Amsterdam, North-Holland,
1961.
- К у к у д ж а н о в В. Н.
1. *Изв. физ.-мат. Ест. Техн. Наук*, АН АрмССР, 11, 61
(1958).
- К у л о н (C o u l o m b C. A.)
1. *Mém. math. et phys.*, 7, 343 (1773).

Левин (Lewin L.)

1. Dilogarithms and associated functions, London, Macdonald, 1958.

Ловецкий Е. Е.

1. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 1, 120 (1958).
2. Изв. АН СССР, Мех. и машиностр., № 6, 36 (1959).

Покровский Г. И., Федоров И. С.

1. Действие удара и взрыва на деформируемые среды, Промстройиздат, М., 1957.

Прагер (Prager W.)

1. J. Appl. Mech., 20, 317 (1953).
2. Proceedings of the Second United States National Congress of Applied Mechanics (ed. P. M. Naghdi), New York, Amer. Soc. Mech. Engrs., 1955.
3. Proc. Instn Mech. Engrs, London, 169, 41 (1955).

Райнхарт, Пирсон (Rinehart J. S., Pearson J.)

1. Behavior of metals under impulsive loads, Cleveland, Ohio. Amer. Soc. Metals, 1954. (Русск. пер.: Поведение металлов при импульсивных нагрузках, ИЛ, М., 1958.)

Ромашов А. Н., Родионов В. П., Сухотин А. П.

1. Докл. АН СССР, 123, 627 (1958).

Седов Л. И.

1. Методы подобия и размерности в механике, 5-е изд., из-во «Наука», М., 1965.

Скемптон, Бишоп (Skempton A. W., Bishop A. W.)

1. Building materials: their elasticity and inelasticity (ed. M. Reiner), ch. X, Soils, Amsterdam, North-Holland, 1954.

Станюкович К. П.

1. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.

Тейлор (Taylor G. I.)

1. The scientific papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor (ed. G. K. Batchelor), vol. I: Mechanics of solids, Cambridge University Press, p. 456, 1958.
2. Proc. Roy. Soc., A200, 235 (1950).

Терцаги (Terzaghi K.)

1. Theoretical soil mechanics. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1943. (Русск. пер.: Теория механики грунтов, Госстройиздат, М., 1961)

Томас (Thomas T. Y.)

1. Plastic flow and fracture in solids, 1961. New York, ets.: Academic Press Inc. (Русск. пер.: Пластическое течение и разрушение в твердых телах, изд-во «Мир», М., 1964.)

Торнхилл (Thornhill C. K.)

1. Unpublished Report, Ministry of Supply, 1957.

Хантер (Hunter S. C.)

1. Unpublished Report, Ministry of Supply, 1958.

Хилл (Hill R.)

1. Unpublished Report, Ministry of Supply, 1948.
2. The mathematical theory of plasticity, 1950. Oxford University Press.
(Русск. пер.: Математическая теория пластичности, ГИИТЛ, М., 1956.)
3. Progress in solid mechanics, vol. II (ed. I. N. Sneddon, R. Hill), ch. VI, Discontinuity relations in mechanics of solids, Amsterdam, North-Holland, 1961.
(Русск. пер.: Сб. *Механика*, № 3 (79), 117—142 (1963).

Хилл, Гилварри (Hill J. E., Gilvarry J. J.)

1. *J. Geophys. Res.*, 61, 501 (1956).

Христоферсон (Christopherson D. G.)

1. Unpublished Report, Ministry of Home Security, 1946.

Хейзорнсвейт (Haythornthwaite R. M.)

1. *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, J. Soil Mech. Found. Div.*, 86, N SM5, 35 (1960).
2. Plasticity, Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics (ed. E. H. Lee, P. S. Symonds), Oxford, Pergamon Press, 1960.

Чедвик (Chadwick P.)

1. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 12, 52 (1959).
2. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 15, 349 (1962) .

Шилд (Shield R. T.)

1. *J. Mech. and Phys. Solids*, 4, 10 (1955).

ОГЛАВЛЕНИЕ

г редактора перевода	5
1. Введение	7

I. Предварительные соображения

2. Эффекты взрывов в грунтах	8
2.1. Общие основы	8
2.2. Предыдущие теоретические исследования . . .	10
2.3. Последовательность событий при подземных взрывах	13
2.4. Задачи и методы настоящего исследования . .	16
3. Применение анализа размерностей к теории взрывов в грунтах	20
3.1. Закон геометрического подобия Гопкинсона .	20
4. Физические свойства продуктов взрыва и грунтов . .	26
4.1. Продукты взрыва	27
4.2. Грунты	31

II. Теоретическая механика идеальных грунтов

5. Сферическое упруго-пластическое течение	47
5.1. Предварительные предложения	47
5.2. Основные уравнения	48
5.3. Соотношения на разрывах	54
5.4. Начальные и граничные условия	56
5.5. Постановка математической задачи	57
5.6. Упрощенная методика	58
5.7. Уравнение для несжимаемого течения	58

III. Модели камуфлетного движения

6. Модели точечного источника	61
6.1. Теория подобия Пенни — Тейлора	62
6.2. Другие теории	78
7. Модели сферического заряда	79
7.1. Теория несжимаемого течения	79
7.2. Определяющие уравнения для больших упругих деформаций	110
7.3. Другие теории	114
8. Заключительные замечания	116
Обозначения	118
Литература	120

П. Чедвик, А. Конс, Г. Гопкинс

**МЕХАНИКА ГЛУБИНЫХ ПОДЗЕМНЫХ
ВЗРЫВОВ**

Редактор *П. Я. Корсоюцкая*

Художник *М. Г. Ровенский*

Художественный редактор

В. И. Шаповалов

Технический редактор *А. В. Грушин*

Корректор *А. Ф. Рыбальченко*

Сдано в производство 25/XII 1965 г.

Подписано к печати 16/V 1966 г.

Бумага $84 \times 108^{1/32} = 2$ бум. л.

6,72 печ. л. Уч.-изд. л. 6,06. Изд. № 1/3424

Цена 44 коп. Заказ № 115,932

Тем. план 1966 г.

Изд-ва «Мир», пор. № 39

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Первая Образцовая типография

имени А. А. Жданова

Главполиграфпрома Комитета по печати

при Совете Министров СССР

Москва, Ж-54, Воровая, 28